SISTEMAS NUMERICOS

1. NÚMEROS RACIONALES

Desde la aparición de las sociedades humanas los números desempeñan un papel fundamental para ordenar y contar los elementos de un conjunto. Así surgen, en primer lugar, los *números naturales*.

▪ Al conjunto formado por los elementos $\{0,1,2,3,...\}$ se le denomina conjunto de los NÚMEROS NATURALES y se representa por N.

$$\mathrm{N} = \{0,1,2,3,...\}$$

Los números naturales resultan insuficientes para indicar ciertas situaciones de la vida cotidiana como las temperaturas bajo cero, las alturas de los pisos y sótanos que recorre un ascensor, los puntos positivos y negativos en un partido etc.

▪ Cuando los números naturales no bastan para dar respuesta matemática a algunos problemas surgen los *números negativos* $(-1,-2,-3,-4,...)$ que, junto con los naturales, forman el conjunto de los NÚMEROS ENTEROS, representado por Z.

$$\mathrm{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

Los números enteros sirven para contar u ordenar elementos, pero no son buenos para expresar medidas. Para medir (relacionar dos magnitudes del mismo tipo) suele ser necesario fraccionar la unidad: la mitad, cuatro terceras partes, siete milésimas,… Estas medidas se expresan mediante fracciones $:\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{7}{1000}$.

Una *fracción* $\frac{m}{n}$ es el cociente indicado de dos números enteros siendo el divisor distinto de cero.

Dicho cociente puede ser un número entero $\left(\frac{6}{2}=3, -\frac{12}{3}=-4...\right)$, o un número fraccionario $\left(\frac{17}{2}=8+\frac{1}{2} \quad ; \quad -\frac{13}{5}=-2-\frac{2}{3}...\right)$.

Todas las fracciones equivalentes a una fracción dada determinan un mismo número, que se llama *número racional*.

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{5}{15}=... \qquad 2=\frac{6}{3}=\frac{14}{7}=\frac{30}{15}=... \qquad -\frac{2}{5}=\frac{-6}{15}=\frac{8}{-20}=...$$

▪ Al conjunto formado por los números enteros y los números fraccionarios se le denomina conjunto de los NÚMEROS RACIONALES y se representa por Q.

$$Q=\left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathrm{Z},\ b \neq 0\right\}$$

Si se toma la expresión fraccionaria de un número racional y dividimos el numerador entre el denominador se obtiene su expresión decimal. La expresión decimal de cualquier número racional es exacta, periódica pura o periódica mixta.

2. NÚMEROS IRRACIONALES

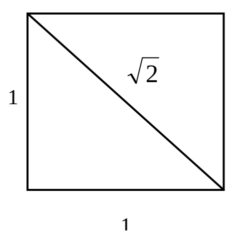
Los números racionales no cubren todas las necesidades de medida o de operaciones. Existen números decimales que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir, como una fracción; se denominan números irracionales.

Los NÚMEROS IRRACIONALES son aquellos que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal no es ni exacta ni periódica. Se representan por I.

Los números irracionales fueron apareciendo en el campo matemático de acuerdo con las necesidades de cada momento; los más conocidos y a la vez los más representativos son : $\sqrt{2}$, π , Φ , $\sqrt{3}$, e.

a) $\sqrt{2} = 1{,}41421356237...$

Es uno de los primeros números irracionales surgidos y descubierto por los pitagóricos al aplicar el Teorema de Pitágoras a un cuadrado de lado igual a la unidad para el cálculo de la diagonal.

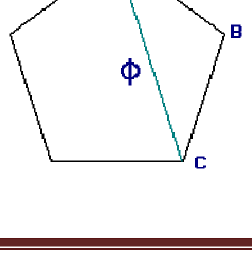


b) $\pi = 3{,}14159265358979...$

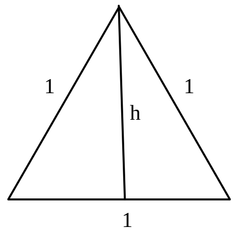
Otro número irracional importante, no relacionado con las raíces cuadradas es el número π; se define como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro: $\pi = \dfrac{\text{longitud de la circunferencia}}{\textit{diámetro}}$.

c) $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875...$

El número de oro o número áureo, representado por la letra griega Φ en honor al escultor griego Fidias, fue el primer número irracional que se conoce como tal. También fue descubierto por los pitagóricos al estudiar la relación entre la diagonal de un pentágono regular y el lado, tomando este como unidad.



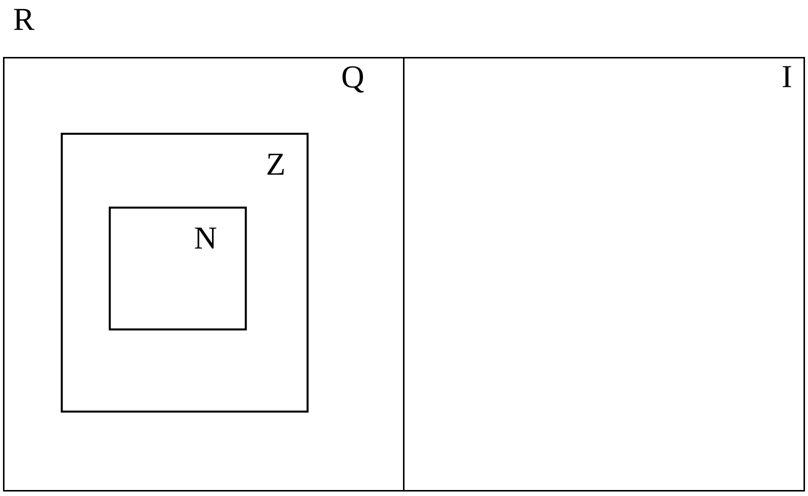
d) El número $\sqrt{3}$ aparece al hallar la altura de un triángulo equilátero tomando como unidad el lado. El valor de la altura es $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025...$



3. NÚMEROS REALES

Los números racionales (Q) junto con los irracionales (I) constituyen el conjunto de los NÚMEROS REALES (R).

$$\text{Números reales (R)}\begin{cases}\text{Racionales (Q)}\begin{cases}\text{Enteros (Z)}\begin{cases}\text{Naturales (N)} \rightarrow 1, 5, \dfrac{6}{3}\\ \text{Enteros negativos} \rightarrow -4, -\sqrt{25}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\begin{cases}\text{Decimales exactos} \rightarrow 0{,}75\\ \text{Decimales periódicos}\begin{cases}\text{Periódicos puros} \rightarrow 3{,}\widehat{6}\\ \text{Periódicos mixtos} \rightarrow 0{,}91\widehat{2}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \text{Irracionales (I): Decimales no exactos y no periódicos} \rightarrow \pi, \sqrt{2}, \Phi\end{cases}$$



$N \subset Z \subset Q$

$R = Q \cup I$

Q e I son disjuntos (no tiene elementos en común)

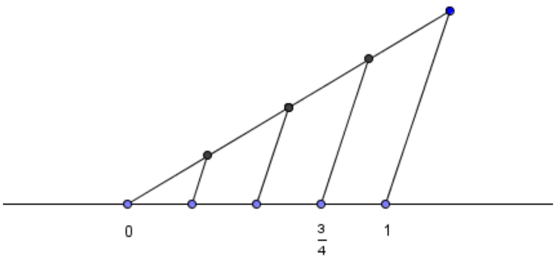
3.1. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS REALES

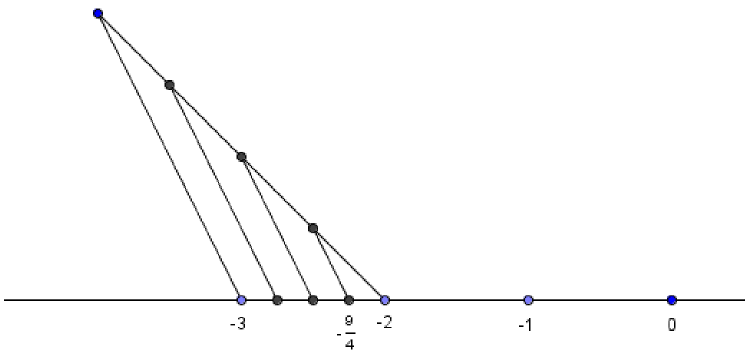
Los números reales se representan como puntos de una recta llamada RECTA REAL. A cada punto le corresponde un número real y viceversa.

- Para representar un número entero llevamos la unidad a la derecha del 0 si es positivo o a la izquierda si es negativo, tantas veces como indica su valor absoluto.
- Para representar un número fraccionario elegimos entre qué dos unidades se encuentra y, por medio del Teorema De Tales, dividimos el segmento correspondiente en tantas partes como indica el denominador, y el punto que ocupa la división que indica el numerador corresponde a dicho número.

EJEMPLO

Representa $\frac{3}{4}$ y $-\frac{9}{4}$





- La mayoría de los números irracionales no pueden representarse en la recta real de una manera exacta tal y como se hace con los números racionales. Se representan de forma aproximada truncando o redondeando su valor.

Sin embargo, las raíces cuadradas se pueden representar de forma exacta con ayuda del Teorema de Pitágoras.

EJEMPLO

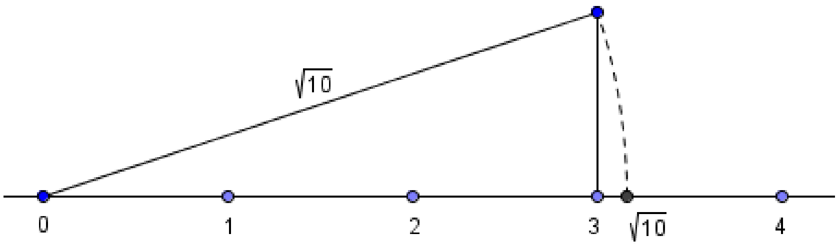
Representa en la recta real $\sqrt{10}$

1º) $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$

Construimos un triángulo rectángulo de catetos 3 y 1.

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que la hipotenusa de ese triángulo mide $\sqrt{10}$.

2º) Con ayuda de un compás llevamos $\sqrt{10}$ sobre la recta real.



4. INTERVALOS Y SEMIRRECTAS.

Para designar algunos tramos de la recta real existe una nomenclatura que debes conocer:

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	$\{x \in \Re / a < x < b\}$ Números comprendidos entre *a* y *b*	
Intervalo cerrado	$[a,b]$	$\{x \in \Re / a \leq x \leq b\}$ Números comprendidos entre *a* y *b* ambos incluidos	
Intervalo semiabierto (o semicerrado)	$[a,b)$	$\{x \in \Re / a \leq x < b\}$	
	$(a,b]$	$\{x \in \Re / a < x \leq b\}$	
Semirrectas	$(a,+\infty)$	$\{x \in \Re / x > a\}$ Números mayores que *a*	
	$[a,+\infty)$	$\{x \in \Re / x \geq a\}$ Números mayores o iguales que *a*	
	$(-\infty,a)$	$\{x \in \Re / x \leq a\}$ Números menores que *a*	
	$(-\infty,a]$	$\{x \in \Re / x \leq a\}$ Números menores o iguales que *a*	

Cuando queremos nombrar un conjunto de puntos formado por dos o más intervalos se utiliza el signo $\cup$ (unión) entre ellos. Por ejemplo, $[3,4) \cup (5,+\infty)$.

Ejemplos

a) Números mayores que 3

b) $\{x \in \Re / 2 \leq x < 5\}$

c) $\{x \in \Re / 3 \leq x \leq 7\}$

d) Números menores que -5

e) Números mayores que 2 excluyendo el 8

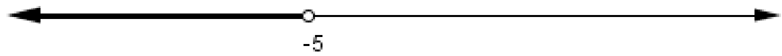
Solución

a) Números mayores que $3 = (3,+\infty)$

b) $\{x \in \Re / 2 \leq x < 5\} = [2,5)$

c) $\{x \in \Re / 3 \leq x \leq 7\} = [3,7]$

d) Números menores que $-5 = (-\infty,5)$



e) Números mayores que 2 excluyendo ell $8 = (2,8) \cup (8,+\infty)$

EJERCICIOS

1. Indica todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen los siguientes números:

$7 \qquad \frac{5}{3} \qquad -\frac{12}{3} \qquad -2{,}15 \qquad 5'323323332... \qquad \sqrt[3]{-8} \qquad \sqrt{5} \qquad (-2)^4$

$-17 \qquad \frac{2}{\pi} \qquad \sqrt[3]{5} \qquad -2{,}3636... \qquad 0´23 \qquad -\frac{17}{3} \qquad \sqrt{9}$

- NATURALES (N)→
- ENTEROS (Z) →
- RACIONALES (Q)→
- IRRACIONALES (I)→
- REALES ($\Re$)→

2. Indica, razonadamente, si los siguientes números son racionales o irracionales:
   a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt{2}$
   b) $\sqrt[5]{32} + 0{,}016016016...$
   c) $0{,}3535... + 0{,}353353335...$
   d) $0{,}15 + 0{,}1\widehat{5}$
   e) $3{,}525525552... + 9{,}252252225...$
   f) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{64}$
   g) $3 \cdot \pi$
   h) 0,010010001… + 1,313131…
   i) 0,33333… + 0,5124124…
   j) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}$
   k) 0,31323132…+ $\sqrt{9}$
   l) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$
3. Escribe dos números racionales y otros dos irracionales comprendidos entre 1 y $\sqrt{2}$.
4. Representa los siguientes números racionales utilizando el Teorema de Tales:
   a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $-\frac{5}{8}$ d) $-\frac{11}{3}$
5. Representa en la recta real los siguientes números irracionales:
   a) $\sqrt{40}$
   b) $\sqrt{27}$
   c) $\sqrt{11}$
   d) $2\sqrt{5}$
   e) $2 + \sqrt{10}$
   f) $2 - \sqrt{5}$
   g) $\frac{\sqrt{17}}{3}$
   h) $-\frac{\sqrt{8}}{3}$
   i) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
6. Expresa en forma algebraica, en forma de intervalo y representa en la recta real los siguientes conjuntos numéricos:
   a) Números reales menores que -5.
   b) Números reales mayores o iguales que 3.
   c) Números reales comprendidos entre -5 y 1 ambos incluidos.

d) Números reales mayores que -2 y menores o iguales que 7.
e) Números reales comprendidos entre -10 y -1.

7. Representa gráficamente y expresa como intervalo:
   a) $A = \{x \in \Re / -3 \leq x \leq 2\}$
   b) $B = \{x \in \Re / 5 < x\}$
   c) $C = \{x \in \Re / x \geq -2\}$
   d) $D = \{x \in \Re / -2 \leq x < 3{,}2\}$
   e) $E = \{x \in \Re / 4 < x < 5{,}1\}$
   f) $F = \{x \in \Re / -3 \leq x\}$

8. Expresa en forma algebraica y representa gráficamente los siguientes intervalos:
   a) $[-2,7]$
   b) $(-\infty,0)$
   c) $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$
   d) $[13,+\infty)$
   e) $(-3,0]$
   f) $\left[\frac{3}{2},6\right)$

9. Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$ siendo:
   a) $A = (-1,4)$ y $B = [0,5]$
   b) $A = (2,+\infty)$ y $B = (-\infty,3]$
   c) $A = [-3,2]$ y $B = (0,9)$
   d) $A = [3,+\infty)$ y $B = (-\infty,5)$
   e) $A = (-2,3]$ y $B = [3,9)$
   f) $A = (-5,9)$ y $B = (9,+\infty)$

10. Dados los conjuntos $A = [-1,+\infty)$, $B = (-\infty,0)$ y $C = [-1,1]$calcula:
    a) $A \cup B$
    b) $A \cup B \cup C$
    c) $A \cap B \cap C$
    d) $A \cup (B \cap C)$