LA FUNCIÓN VARIABLE ALEATORIA (va.)

Una ***variable aleatoria X*** es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.

> Ej: Se sacan 2 fichas de manera sucesiva sin reemplazo de una urna que contiene 4 rojas y 3 negras. Los posibles resultados y los valores x de la variable aleatoria (v.a.) X, donde X es el número de fichas rojas son:

Espacio muestral	x .
RR	2
RB	1
BR	1
BB	0

Si un espacio muestral contiene un numero finito de posibilidades o una serie interminable con tantos elementos como número enteros existen, se llama **espacio muestral discreto**.

Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual a número de puntos en un segmento de línea, se llama **espacio muestral continuo**.

Una v.a. se llama **variable aleatoria discreta** si se puede contar su conjunto de resultados posibles.

Cuando una v.a. puede tomar valores en una escala continua, se la denomina **variable aleatoria continua**.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

En las lecciones anteriores calculamos la probabilidad de los eventos de un espacio muestral **S.** En la práctica, es de mayor interés el estudio de reglas que establecen alguna correspondencia a los elementos de **S.**

Ejemplo. En un experimento se lanzan tres monedas y se observa el resultado de cada una: cara(**c**), o sello(**s**), los posibles resultados (espacio muestral) son,

> **S** = {(c,c,c),(c,c,**s**),(c,**s**,c),(**s**,c,c),(c,**s**,**s**),(**s**,c,**s**),(**s**,**s**,c),(**s**,**s**,**s**)}

Suponga que es de interés la cantidad de sellos que se obtienen. Si los valores los representamos con **X,** entonces se dice que **X** es una variable aleatoria.

Al realizar el experimento, puede resultar cualquier elemento de S.
En correspondencia, la variable aleatoria **X** puede tomar cualquier valor
x = 0, 1, 2, 3

Las variables aleatorias establecen correspondencia de **S** a $\Re$.
Esta correspondencia es una función y se la puede definir formalmente:

S: espacio muestral
X: variable aleatoria
e: cualquier elemento de **S**
x: valor que puede tomar **X**

$\mathbf{X}: \mathbf{S} \rightarrow \Re$

$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{x}, \quad \text{dom } \mathbf{X} = \mathbf{S}, \quad \text{rg } \mathbf{X} \subset \Re$

Para el ejemplo anterior, la correspondencia que establecida es:
X: Variable aleatoria (cantidad de sellos que se obtienen)

e	x
(c,c,c)	0
(c,c,s)	1
(c,s,c)	1
(s,c,c)	1
(c,s,s)	2
(s,c,s)	2
(s,s,c)	2
(s,s,s)	3

rg X = {0, 1, 2, 3}

Para un espacio muestral **S** pueden definirse muchas variables aleatorias. Para el ejemplo de las 3 monedas, algunas otras variables aleatorias que se pueden definir sobre **S**, son

Y: diferencia entre el número de caras y sellos
Z: el número de caras al cubo, mas el doble del número de sellos
etc.

Nota: Para cada variable aleatoria el rango es un subconjunto de $\Re$ por lo que puede considerarse que $\Re$ es el espacio muestral para las variables aleatorias así como **S** es el espacio muestral para los eventos, y se puede definir un álgebra para el estudio de los subconjuntos de $\Re$

Según el tipo de correspondencia establecida, las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.

En el ejemplo de las monedas, **X** es una variable aleatoria discreta pues su **rango X** es un subconjunto de los enteros. Además es finita.

Ejemplo. En un experimento se lanza una moneda hasta que salga sello.
Determine el rango de la variable aleatoria discreta siguiente:
X: cantidad de lanzamientos hasta que sale sello

Respuesta: **S**={(s), (c,s), (c,c,s), (c,c,c,s), ...}, resultados posibles
rg **X** = {1, 2, 3, 4, ...}
X es una variable aleatoria discreta infinita

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Con cada valor de una variable aleatoria discreta, se puede asociar un valor de probabilidad

Sea X: variable aleatoria discreta
Entonces, P(X=x) es la probabilidad que X tome el valor x

Ejemplo. En el experimento de lanzar tres monedas y observar el resultado de cada una: cara(c), o sello(**s**)

S = {(c,c,c),(c,c,**s**),(c,**s**,c),(**s**,c,c),(c,**s**,**s**),(**s**,c,**s**),(**s**,**s**,c),(**s**,**s**,**s**)}

X: Variable aleatoria discreta (cantidad de sellos que se obtienen)

e	**x**
(c,c,c)	0
(c,c,s)	1
(c,s,c)	1
(s,c,c)	1
(c,s,s)	2
(s,c,s)	2
(s,s,c)	2
(s,s,s)	3

Los valores de probabilidad para X se obtienen del conteo de los valores de **x:**
El valor 0 ocurre 1 vez entre 8
El valor 1 ocurre 3 veces entre 8, etc

x	**P(X=x)**
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

La correspondencia que define P(X=x) es una función y sus valores constituyen la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, la cual se puede definir formalmente. Expresándola con la notación f(x),

Sea: **f(x) = P(X=x),** distribución de probabilidad de **X,**
entonces **f** establece una correspondencia de **X** a los números reales,

Definición:

Distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X

$f(x) = P(X=x)$

$f: X \rightarrow \Re,$

$x \rightarrow f(x),\quad \text{dom } f = X,\qquad \text{rg } f \subset [0, 1]$

Siendo f una función de probabilidad, su rango debe estar en el intervalo [0, 1]
Esta función debe cumplir las siguientes propiedades:

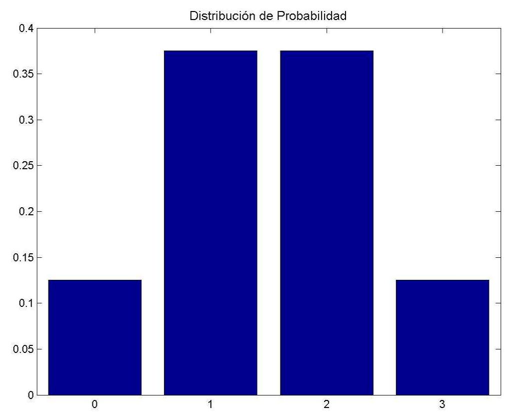
1) $\forall x\ f(x) \geq 0$

2) $\sum_{x} f(x) = 1$

Ejercicio. Verifique que se cumplen estas propiedades en el ejemplo de las 3 monedas

La correspondencia que establece f puede describirse en forma tabular como en el ejemplo de las tres monedas. También puede describirse gráficamente, y en algunos casos mediante una fórmula matemática como se verá después.

Ejemplo. Grafique la distribución de probabilidad f del ejemplo



Ejemplo. En un lote de 5 artículos, 3 son defectuosos y 2 aceptables. Se toma una muestra aleatoria de 2 artículos. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de artículos defectuosos que salen en la muestra.

Respuesta

Sean: **a, b, c**: artículos defectuosos

d, e: artículos aceptables

Cantidad de formas diferentes de obtener la muestra

$N(\mathbf{S}) = {}_5\mathbf{C}_2 = 10$

S = {(**a,b**),(**a,c**),(**a**,d),(**a**,e),(**b,c**),(**b**,d),(**b**,e),(**c**,d),(**c**,e),(d,e)}

X: Variable aleatoria discreta (cantidad de artículos defectuosos)

x = 0, 1, 2

Distribución de probabilidad de X

x	f(x)=P(X=x)
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Los valores de f se obtuvieron de un conteo de los elementos de **S**

Ejemplo. Sea **X** una variable aleatoria discreta cuya distribución de probabilidad está dada por

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \mathbf{kx^2, x = 0,1,2,3} \\ \mathbf{0, \quad otro \quad x} \end{cases}$$

Encuentre P(X=2)

Respuesta. Por la propiedad 2) $\sum_{x} \mathbf{f(x) = 1}$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{3} \mathbf{kx^2 = k(0)^2\ k(1)^2 + k(2)^2 + k(3)^2 = 1} \Rightarrow k = 1/4$$

Por lo tanto, **P(X=2) = (1/4)(2)^2 = 2/7**

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Es de interés conocer el valor de probabilidad de que la variable aleatoria no exceda a un valor dado. Se denomina Distribución de Probabilidad Acumulada

Sea X: variable aleatoria discreta,
f(x): distribución de probabilidad de la variable aleatoria X
F(x): distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria X

F es una función definida sobre el conjunto de los números reales y expresa la probabilidad que la variable aleatoria **X** tome cualquier valor menor o igual que un valor dado **x:**

Definición:

Distribución de Probabilidad Acumulada de la variable aleatoria X

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} \mathbf{f(t)}$ para $-\infty < x < \infty$

F: $\Re \to \Re$, dom F = $\Re$, rg F $\subset$ [0, 1]

Ejemplo. Encuentre la distribución de probabilidad acumulada para el ejemplo de las tres monedas

Respuesta: Sea X variable aleatoria discreta (cantidad de sellos), su distribución de probabilidad es:

x	f(x)=P(X=x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Entonces,

$F(0) = P(X\leq 0) = \sum_{t\leq 0} \mathbf{f(t)} = f(0) = 1/8$

$F(1) = P(X\leq 1) = \sum_{t\leq 1} \mathbf{f(t)} = f(0) + f(1) = 1/8 + 3/8 = 1/2$

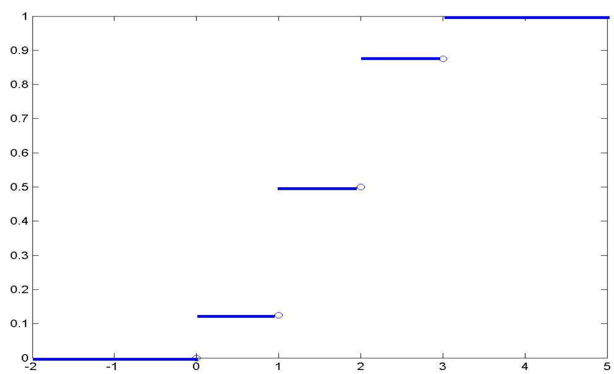
$F(2) = P(X\leq 2) = \sum_{t\leq 2} \mathbf{f(t)} = f(0) + f(1) + f(2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$

$F(3) = P(X\leq 3) = \sum_{t\leq 3} \mathbf{f(t)} = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

La distribución acumulada también se puede graficar

Ejemplo. Grafique la distribución acumulada del ejemplo anterior



Algunas propiedades de la distribución acumulada F:

1) $0\leq F(x)\leq 1$
2) $a\leq b \Rightarrow F(a)\leq F(b)$ (F es creciente)
3) $P(X>a) = 1 - P(X\leq a) = 1 - F(a)$

Note que siendo dom F = $\Re$, es correcto conocer la distribución acumulada para cualquier valor de x. Ejemplos.

$F(2.5) = P(X\leq 2.5) = 7/8$

$F(-3.4) = 0$

$F(24.7) = 1$

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

El valor esperado o media es una medida estadística que describe la tendencia central de la variable aleatoria. Podemos pensar que representa el valor promedio que tomaría la variable aleatoria si el experimento se realizara un gran número de veces en condiciones similares**.**

Definición

Sea X: variable aleatoria discreta

f(x): distribución de probabilidad

Entonces

μ, o E[X] representan el valor esperado de la variable aleatoria X

(el símbolo del alfabeto griego μ léalo "mu")

$$\mu = E[X] = \sum_{x} \mathbf{xf(x)} \qquad (8)$$

Es la suma de los valores de X ponderados con su valor de probabilidad

Ejemplo. En el experimento de lanzar tres monedas, en el cual era de interés la variable aleatoria X correspondiente al número de sellos. Calcule el valor esperado de X

Respuesta: Se obtuvo la distribución de probabilidad de X:

x	f(x)=P(X=x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Entonces, el valor esperado de X es:

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{3} \mathbf{xf(x)} = 0(1/8) + 1(3/8) + 2(3/8) + 3(1/8) = 1.5$$

Significa que si se realizaran un gran número de ensayos, en promedio se obtendrían 1.5 sellos.

En este ejemplo, el valor esperado está en el centro de la distribución de los valores de X. Esto se debe a que f(x), la distribución de probabilidad de X es simétrica por lo tanto el valor esperado es el valor central de X.

Ejemplo. En el experimento de obtener una muestra del lote de 5 artículos, encuentre el valor esperado de la variable aleatoria X correspondiente al número de artículos defectuosos.

Respuesta: Se obtuvo la distribución de probabilidad de X:

x	f(x)=P(X=x)
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Entonces, el valor esperado de X es:

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{2} \mathbf{xf(x)} = 0(1/10) + 1(6/10) + 2(3/10) = 1.2, \quad \text{(artículos defectuosos)}$$

En este ejemplo, el valor esperado no está en el centro de la distribución de los valores de X. Esto se debe a que la distribución de probabilidad de X no es simétrica. Se puede entender que el valor esperado debe estar en la región de X en la que los valores tienen mayor probabilidad de ocurrir.

El valor esperado puede extenderse a expresiones con la variable aleatoria. Estas expresiones también son variables aleatorias y con igual dominio.

Sea X: Variable aleatoria discreta
f(x): Distribución de probabilidad
G(X): Alguna expresión con X

Entonces

$$\mu_{G(X)} = E[G(X)] = \sum_{x} \mathbf{G(x)f(x)} \qquad (9)$$

(es la media o valor esperado de G(X))

Ejemplo. Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad:

x	f(x)
1	0.1
2	0.4
3	0.3
4	0.2

Sea G(X) = 2X + 1. Encuentre E[G(X)]

Respuesta.

$$E[G(X)] = \sum_{x=1}^{4} \mathbf{G(x)f(x)} = (2(1)+1)(0.1) + (2(2)+1)(0.4) + (2(3)+1)(0.3) + (2(4)+1)(0.2) = 6.2$$

Ejemplo. Un almacén vende diariamente 0, 1, 2, 3, o 4 artículos electrodomésticos con probabilidad 10%, 40%, 30%, 15%, y 5% respectivamente. Mantener el local le cuesta diariamente \$40. Por cada artículo que vende, tiene una ganancia de \$50. Encuentre el valor esperado de la ganancia diaria.

Respuesta:

Sea X: variable aleatoria discreta (número de artículos que vende cada día)

La distribución de probabilidad de X es:

x	f(x)=P(X=x)
0	0.1
1	0.4
2	0.3
3	0.15
4	0.05

Sea G(X) = 50X – 40, variable aleatoria que representa la ganancia diaria
Entonces

$$E[G(X)]= \sum_{x=0}^{4} \mathbf{G(x)f(x)} = (50(0)-40)(0.1) + (50(1)-40)(0.4) + ... = 42.5$$

Significa que cada día la ganancia esperada es $42.5

Definición. Se dice que un juego es "justo" si el valor esperado de la ganancia es cero.

Ejemplo. Un juego consiste en lanzar tres monedas. Si salen 1 o 2 sellos, se pierde $2. ¿Cuanto se debe ganar en los otros casos para que sea un juego "justo"?

Respuesta:
Sea X: número de sellos (variable aleatoria discreta)
f(x): distribución de probabilidad de X
G(X): ganancia (variable aleatoria discreta)
La distribución de probabilidad de X ya la conocemos:

x	f(x)=P(X=x)	G(x)
0	1/8	k
1	3/8	-2
2	3/8	-2
3	1/8	k

k es la cantidad que se debe ganar cuando salen 0 o 3 sellos.

Entonces $E[G(X)]= \sum_{x=0}^{3} \mathbf{G(x)f(x)} = k(1/8) + (-2)(3/8) + (-2)(3/8) + k(1/8) = 0$

Pues el valor esperado debe ser 0. De donde se obtiene, k = 6, (dólares)

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

Sean X: variable aleatoria discreta
f(x): distribución de probabilidad de X
a, b $\in \Re$, números reales cualesquiera
Entonces $E[aX + b] = aE[X] + b$ (10)

Demostración:

$$E[aX+b] = \sum_x (ax+b)f(x) = \sum_x axf(x) + \sum_x bf(x) = a\sum_x xf(x) + b\sum_x f(x)$$

siendo $E[x] = \sum_x xf(x)$, además $\sum_x f(x) = 1$, se completa la demostración.

Corolarios: 1) $E[aX] = a\,E[x]$, 2) $E[b]=b$

El segundo corolario demuestra que si el resultado de un experimento es único, el valor esperado debe ser este mismo resultado.

Ejemplo. Use la fórmula (10) para calcular el valor esperado en el ejemplo del almacén

Respuesta:

$G(X) = 50X - 40$

$E[G(X)] = E[50X - 40] = 50\,E[X] - 40$

$E[X] = \sum_{x=0}^{4} xf(x) = 0(0.1) + 1(0.4) + 2(0.3) + 3(0.15) + 4(0.05) = 1.65$

$\Rightarrow E[G(X)] = 50(1.65) - 40 = 42.5$

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

La varianza o variancia es una medida estadística que indica cuan dispersos están los valores de la variable aleatoria alrededor de la media, es decir mide su variabilidad.

Definición

Sea X: variable aleatoria discreta

f(x): distribución de probabilidad

μ, o E[X]: valor esperado de la variable aleatoria X

Entonces

σ^2 o V[X] representan la varianza de la variable aleatoria X

(el símbolo σ del alfabeto griego, se lee “sigma”)

$$\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \qquad (11)$$

Es la suma de las diferencias de cada valor x con respecto a la media, ponderadas con los valores de probabilidad). Al elevar al cuadrado, no importa si los valores de X están a la izquierda o a la derecha de la media

Ejemplo. En el experimento de lanzar tres monedas, es de interés la variable aleatoria X correspondiente al número de sellos. Calcule la varianza de X.

Respuesta: Se tiene la distribución de probabilidad de X:

x	f(x)=P(X=x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

También se tiene el valor esperado de X: $\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{3} xf(x) = 1.5$

Entonces, la varianza de X es,

$\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2 f(x) = (0-1.5)^2(1/8)+(1-1.5)^2(3/8)+(2-1.5)^2(3/8)+(3-1.5)^2(1/8) = 0.75$

FÓRMULA ALTERNA PARA CALCULAR LA VARIANZA

$$\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 \qquad (12)$$

Demostración. Usando las propiedades del valor esperado:

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] = E[X^2] - E[2X\mu] + E[\mu^2] =$$
$$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

Ejemplo. Calcule la varianza en el ejemplo anterior usando la fórmula (12)

$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 f(x) = 0^2(1/8) + 1^2(3/8) + 2^2(3/8) + 3^2(1/8) = 3$

$\sigma^2 = V[X] = E[X^2] - \mu^2 = 3 - 1.5^2 = 0.75$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA

Sean X: variable aleatoria discreta
f(x): distribución de probabilidad de X
a, b $\in \Re$, números reales cualesquiera

Entonces $V[aX + b] = a^2V[X]$ (13)

Demostración.
Usando la fórmula alterna de varianza y las propiedades del valor esperado:

$$V[aX+b] = E[(aX + b)^2] - E^2[aX + b] = E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - (aE[X] + b)^2$$
$$= a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2 - (a^2E^2[X] + 2abE[X] + b^2)$$
$$= a^2(E[X^2] - E^2[X]) = a^2\, V[X]$$

Corolarios: 1) $V[aX] = a^2\, V[x]$, 2) $V[b]=0$

El segundo corolario demuestra que si el resultado de un experimento es único, entonces la variabilidad es nula.

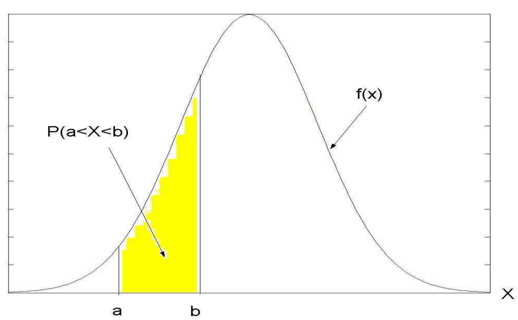
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Las variables aleatorias continuas se usan para describir los resultados posibles de experimentos en los cuales los valores pueden medirse en una escala continua. Estos resultados pueden provenir de mediciones tales como el peso de un artículo, o la duración de alguna actividad.

La definición de probabilidad de una variable aleatoria continua supone la existencia de una función denominada **función de densidad de probabilidad** de manera que el área debajo del gráfico de esta función sea la medida de la probabilidad de la variable en cualquier intervalo.

Sea **X** una variable aleatoria continua.
Se dice que una función **f** es una **función de densidad de probabilidad** de **X**, si y solo si,

$$\mathbf{P(a \le X \le b)} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx}, \quad \text{siendo } \mathbf{a,b \in \Re}$$



Con esta definición se puede concluir que la probabilidad que una variable aleatoria continua tome un valor particular es nulo:

$$\mathbf{P(X = c)} = \int_c^c \mathbf{f(x)dx = 0}, \quad \mathbf{c \in \Re}$$

Por lo tanto no importa si se incluyen o no los extremos de un intervalo:

$$\mathbf{P(a \le X \le b) = P(a<X<b)}$$

En forma similar a las distribuciones discretas, una función de densidad de probabilidad debe cumplir las siguientes propiedades:

1) $\mathbf{f(x) \ge 0}, \quad \mathbf{-\infty < x < +\infty}$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)dx = 1}$

Ejemplo
Suponga que el tiempo de atención de cada cliente en una estación de servicio es una variable aleatoria continua con la función de densidad de probabilidad:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otro } x \end{cases}$$

a) Verifique que cumple las propiedades de una función de densidad

Sea **X**: variable aleatoria contínua (duración en horas)

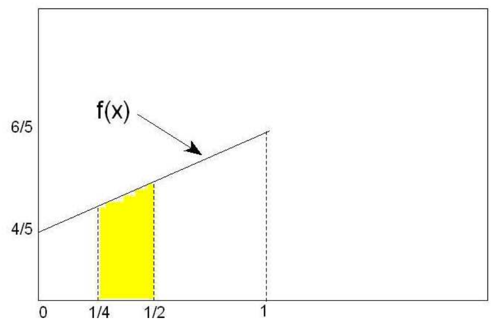
1) f(x) ≥ 0, -∞<x<+∞: es cierto para f(x) dada

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$: $\int_0^1 \frac{2}{5}(x+2)dx = \frac{2}{5}(\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_0^1 = 1$

b) Calcule la probabilidad que el tiempo de atención esté entre 15 y 30 minutos

P(1/4<X<1/2) = $\int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{5}(x+2)dx = \frac{2}{5}(\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{1/4}^{1/2} = 19/80 = 0.2375$

Interpretación gráfica



Al igual que en el caso discreto se puede definir una función de distribución de probabilidad acumulada, la cual en el caso continuo se denomina Función de Distribución

Sea **X:** variable aleatoria contínua con función de densidad **f(x)**
Entonces, la función

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \text{para } -\infty < x < +\infty$$

se denomina **Función de Distribución** de la variable aleatoria **X** .

Esta función cumple algunas propiedades:

1) $\frac{d}{dx}$ F(x) = f(x)

2) a < b ⇒ F(a) < F(b), F es una función creciente

3) P(a ≤ x ≤ b) = F(b) – F(a)

Ejemplo.
En el ejemplo anterior, encuentre la Función de Distribución

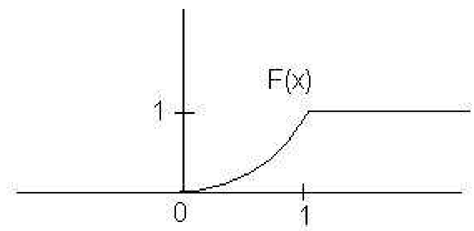
Respuesta

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{2}{5}(t+2)dt = \frac{2}{5}(\frac{t^2}{2}+2t)\Big|_0^x = \frac{2}{5}(\frac{x^2}{2}+2x)$$

Es una función de variable real con el siguiente dominio:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right), & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Su gráfico



Ejemplo.
Use la Función de Distribución para calcular P(1/4<X<1/2) en el ejemplo anterior

Respuesta

$$\mathbf{P(1/4<X<1/2) = F(1/2) - F(1/4) = \frac{2}{5}\left(\frac{(1/2)^2}{2} + 2(1/2)\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{(1/4)^2}{2} + 2(1/4)\right)}$$

$$\mathbf{= 19/80}$$

MEDIA Y VARIANZA DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Si X es una variable aleatoria continua y f(x) es su función de densidad de probabilidad, entonces se define:

media de X: $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

varianza de X: $\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$.

Ejemplo
Calcule la media y la varianza para el ejemplo de la estación de servicio

X: Variable aleatoria continua (tiempo de atención en horas)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otro } x \end{cases}$$

Respuesta

$$\mu = E[X] = \int_0^1 x \frac{2}{5}(x+2) dx = \frac{2}{5}\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = 8/15 = 0.533$$

es el tiempo de atención promedio para los clientes

$$\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 = \int_0^1 x^2 \frac{2}{5}(x+2) dx - (8/15)^2 = 0.0822$$

es más fácil usar la fórmula alterna para calcular la varianza.

PROPIEDADES DE LA MEDIA Y LA VARIANZA

. Sea X una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad f(x)

Si $a, b \in \Re$

Entonces

$E[aX + b] = aE[X] + b$

$V[aX + b] = a^2V[X]$.

La demostración y los corolarios son similares al caso de las variables aleatorias discretas, con la diferencia que en lugar de sumas, ahora debe usar integrales.

Las definiciones anteriores pueden extenderse a nuevas variables aleatorias definidas con X

Sea X una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad f(x)

Si G(X) es alguna expresión con X

Entonces

$$\mu_{G(X)} = E[G(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G(x)f(x)dx}$$

Ejemplo

Suponga que en ejemplo de la estación de servicio, el costo de atención a cada cliente está dado por la siguiente variable aleatoria:

$G(X) = 10 + 5X$ (dólares)

Calcule la media del costo de atención

Respuesta

$E[G(X)] = E[10 + 5X] = 10 + 5E[X] = 10 + 5(8/15) = 12.667$ **dólares**