TEORIA DE CONJUNTOS

Definiciones:

1.- **Conjunto**: es una lista, clase o colección de objetos bien definidos, objetos que, pueden ser cualesquiera: números, personas, letras, etc. Estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

Ejemplos: { 1, 3, 7, 10}
$\{x/x^2 -3x -2= 0\}$
{ Inglaterra, Francia, Dinamarca}

2.-**Subconjunto**: A es subconjunto de B si todo elemento de A lo es también de B.

Notación: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Ejemplo:
El conjunto C = {1,3,5} es un subconjunto del D = {5,4,3,2,1} ya que todo elemento de C pertenece al conjunto D.

3.- **Conjunto Universal**: es aquel conjunto que no puede ser considerado un subconjunto de otro conjunto, excepto de si mismo. Todo conjunto se debe considerar un subconjunto del Conjunto Universal.

Notación: U

Ejemplo:
A = {1,3,5} B = {2,4,6,8}

U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

4.- **Conjunto Potencia:** se denomina conjunto potencia de A, P(A), a la familia de todos los subconjuntos del conjunto A. Sí el conjunto A tiene n elementos, el conjunto potencia de A tendrá 2^n elementos.

Notación:

Ejemplo:
A = {3,4,5}
$P(A)= 2^3 = 8$, lo que significa que pueden formarse 8 subconjunto de A.

P(A)= { {3}, {4}, {5}, {3,4}, {3,5}, {4,5}, {3,4,5}, ϕ }.

5.- **Conjunto Vacío**: es aquel que no posee elementos y es subconjunto de cualquier otro conjunto.

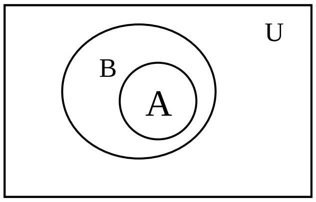
Notación: $\phi = \{ x / x \neq x \}$

Ejemplo:
$B= \{x/x^2 = 4$, x es impar}. B es entonces un conjunto vacío.

6.-**Diagrama de Venn**: Los diagramas de venn permiten visualizar gráficamente las nociones conjuntistas y se representan mediante círculos inscritos en un rectángulo. Los círculos corresponden a los conjuntos dados y el rectángulo al conjunto universal.

Ejemplo:

$A \subset B$



7.-**Conjuntos Finitos o Infinitos**: Los conjuntos serán finitos o infinitos, si sus elementos son o no factibles de contar.

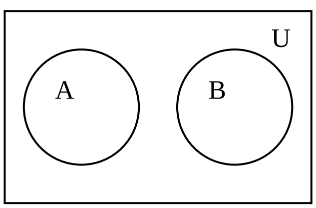
Ejemplo:

M= {a,e,i,o,u}, M es finito.

N={1,3,5,7...}, N es infinito.

8.- **Conjuntos disjuntos**: Dos conjuntos son disjuntos si no tienen elementos comunes.

Gráficamente:



Ejemplo:

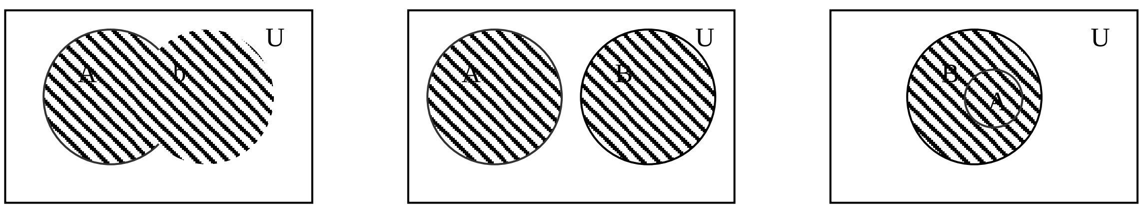
A= {1,3,8}, B={2,4,9}; A y B son conjuntos disjuntos.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

1.-**<u>Unión de conjuntos</u>**: La unión de dos conjuntos A y B es un conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B.

<u>Notación</u>: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

<u>Gráficamente</u>:



<u>Ejemplo</u>

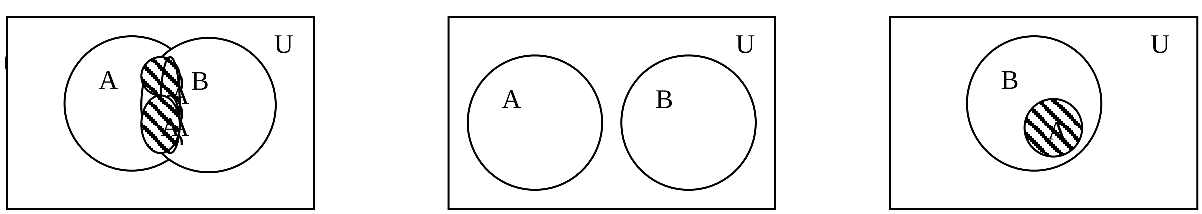
A={3,4,5,8,9} B={5,7,8,9,10}

A∪B={3,4,5,7,8,9,10}

2.- **<u>Intersección de conjuntos</u>**: La intersección de dos conjuntos A y B, es un conjuntos cuyos elementos son comunes a A y B.

<u>Notación</u>: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

<u>Gráficamente</u>:



<u>Ejemplo</u>:

A={7,8,9,10,11,12} B={5,6,9,11,13,14}

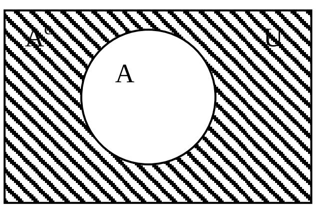
$A \cap B=\{9, 11\}$

3.-**Complemento**: El complemento de un conjunto A, son todos los elementos que no están en el conjunto A y que están en el universo.

Notación: $A^c = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$

$A^c = U - A$

Gráficamente:



Ejemplo:

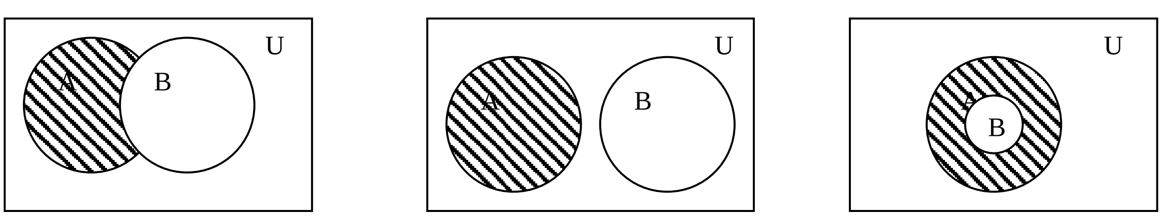
U= {1,2,3,...10} y A={ 3,4,6,7}

A^c= {1,2,5,8,9,10}

4.- **Diferencia de conjuntos**: La diferencia de dos conjuntos A y B, es un conjunto cuyos elementos son aquellos que están en el conjunto A, pero no en el conjunto B.

Notación: $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

Gráficamente:



Ejemplo:

$C = \{u, v, x, y, z\}$ $D = \{s, t, z, v, p, q\}$

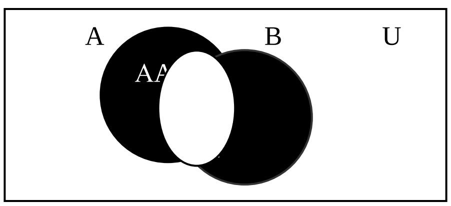
$C - D = \{x, y, u\}$

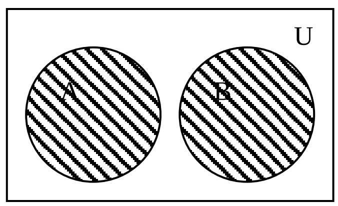
5.- **Diferencia Simétrica**: La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es un conjunto cuyos elementos son aquellos que están en A, pero no en B, unidos con aquellos que están en B, pero no en A.

Notación: $A \Delta B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x / x \notin A \wedge x \in B\}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Gráficamente:





Ejemplo:

$A = \{1,3,4,5,6,7,20,30\}$ $B = \{2,6,20,40,50\}$

$A \Delta B = \{1,3,4,5,7,30\} \cup \{2,40,50\}$

$A \Delta B = \{1,2,3,4,5,7,30,40,50\}$

6.-**Producto cartesiano**: El producto cartesiano entre dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados que tienen como primera componente un elemento de A y como segundo componente un elemento de B.

Notación: $A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo:

$A = \{1,2\}$ $B = \{3,4,5\}$

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$

Observaciones:

1.- $n(A) = n \ \wedge \ n(B) = s \ \Rightarrow \ n(A \times B) = n \bullet s$

2.-Si $A = \phi \quad B = \phi \Leftrightarrow A \times B = \phi$

3.- $A \times B \neq B \times A$ siempre que se cumpla que $A \neq B$

7.- **Cardinalidad**:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap (B \cap C))$$

LEYES DE ALGEBRA DE CONJUNTO

1.- **Asociatividad**:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

2.- **Conmutatividad**:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3.- **Distributividad**:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4.- **Absorción**:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$A \cap (A \cup B) = A$

5.- **Idempotencia**:

$A \cup A = A$

$B \cap B = B$

6.- **Identidad**:

$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$

$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$

7.-**Complemento**:

$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \phi$

$(A^c)^c = A$ $U' = \phi$, $\phi' = U$

8.- **Ley de Morgan**:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$A - B = A \cap B^c$

EJERCICIOS RESUELTOS

Demuestre:

1.-$(A - B) \cap B = \phi$

$(A \cap B^c) \cap B = \phi$

$A \cap (B^c \cap B) = \phi$

$A \cap \phi = \phi$

$\phi = \phi$

2.- $(A – B) \cap (A - C) = A – (B \cup C)$

$(A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = A – (B \cup C)$

$A \cap (B^c \cap A) \cap C^c = A – (B \cup C)$

$(A \cap A) \cap (B^c \cap C^c) = A – (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C)^c = A – (B \cup C)$

$A – (B \cup C) = A – (B \cup C)$

3.- $n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n[A \cap (B \cap C)]$

$n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B\cup C) - n[A\cap(B\cup C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B\cap C) - n[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + [n(A \cap B) \cap (A\cap C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n[A\cap(B\cap C)]$

4.- $(A \cup A) \cap (A \cup B^c) = A$

$A \cap (A \cup B^c) = A$

$A = A$

$A = A$

5.- $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

$A \cup (B \cap C) = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

$(B\cup A)\cap(C\cup A) = (B\cup A)\cap(C\cup A)$

<u>Simplificar</u>:

1.- $A \cup [(B \cap (A \cup B)) \cap (A \cup (A \cap B))]$

$A \cup [(B \cap A) \cup (B \cap B)] \cap(A \cup A) \cap (A\cup B)$

$A \cup [(B \cap A) \cup (B \cap B)] \cap A \cap (A \cup B)$

$A \cup [B \cap A] \cup B= B$

$(A \cup B) \cap (A \cup A)$

$(A \cup B) \cap (A)$

A

Una encuesta aplicada a un grupo de jóvenes, acerca de las preferencias por alguna radio F.M. de la región, señaló que:

277 preferían Carolina
233 preferían Manquehue
405 preferían Tiempo
165 preferían Manquehue y Tiempo
120 preferían Manquehue y Carolina
190 preferían Carolina y Tiempo
105 preferían las tres estaciones de radio mencionadas

Determine:

a) ¿Cuántos jóvenes fueron encuestados?
b) ¿Cuántos jóvenes prefieren sólo Carolina?
c) ¿Cuántos jóvenes prefieren sólo Carolina y Tiempo?

Solo C= 277-120+105-190+105-105
Solo C= 72 jóvenes

Solo M= 233-120+105-105-165+105
Solo M= 53 jóvenes

Solo C y M= 120-105= 15 Jóvenes

Solo C y T= 190-105= 85 jóvenes

Solo M y T= 165-105= 60 jóvenes

Sólo T= 405-190+105-165+105-105= 545 jóvenes

Total jóvenes encuestados= 72+53+15+85+60+155+105= 545 jóveses

a) Fueron encuestados 545 jóvenes
b) Sólo Carolina prefieren 72 jóvenes
c) Solo Carolina y Tiempo prefieren 85 jóvenes

EJERCICIOS PROPUESTOS

Demostrar:

1.- $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

2.- $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

3.- $(A - B) \cap B = \phi$

4.- $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

5.- $A - (B \cap A) = A - B$

6.- $A^c - B^c = B - A$

Simplificar:

1.- Si $A \subset B \Rightarrow A \cup (B-A)=$

2.- $A \cap (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)=$

3.- $[A \cap (A \cup B)]^c \cup B$

4.- $[(A-B) \cap (B-C)] \cup (C-A)$

Ejercicios

1.- Una encuesta realizada a 2000 hombres reveló lo siguiente respecto a sus gustos por distintos tipos de mujeres:

800 preferían las rubias;
950 preferían las morenas;
750 preferían las colorinas;
150 preferían las rubias y morenas;
300 preferían las morenas y colorinas
250 preferían las rubias y colorinas

200 Sólo morenas y colorinas

Determine el número de hombres que :

a) Preferían los tres tipos de mujeres encuestados.
b) No preferían estos tipos de mujeres.

2.- En una reunión se determina que 40 personas son aficionadas al juego, 39 son aficionadas al vino y 48 a las fiestas, además hay 10 personas que son aficionadas al vino, juego y fiestas, existen 9 personas aficionadas al juego y vino solamente, hay 11 personas que son aficionadas al juego solamente y por último nueve a las fiestas y el vino.

Determinar:

a) El número de personas que es aficionada al vino solamente.
b) El número de personas que es aficionada a las fiestas solamente

3.- En una encuesta realizada a 320 alumnos de Ingeniería Comercial de la Universidad de Valparaíso, se descubrió que estos prefieren tres lugares para sus "carretes" de fin de semana:

95 prefieren ir al "Kamikaze";
90 prefieren ir al "Playa";
120 prefieren ir al "Bar de los Cuatro Vientos";
30 prefieren ir al "Kamikaze" y al "Playa"
10 prefieren ir al "Kamikaze" y al "Bar de los Cuatro Vientos"
40 prefieren ir al "Playa" solamente
60 prefieren ir al "Kamikaze" solamente

Determine el número de estudiantes que prefieren:

a) Sólo ir al "Bar de los Cuatro Vientos"
b) Ir a los tres lugares
c) No salir y quedarse estudiando el fin de semana