APUNTES DE ÁLGEBRA

Números reales.

Veamos los diferentes tipos de números reales.

Números naturales: 1,2,3,...

Enteros: -3, -2, -1, 0 1 2 3,...

***Racionales*:** Son razones entre números enteros $r = \frac{m}{n}$, con m y n enteros y $n \neq 0$

ejemplos de racionales son $\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}, 46 = \frac{46}{1},\ 0.17 = \frac{17}{100}$.

***Irracionales*.**

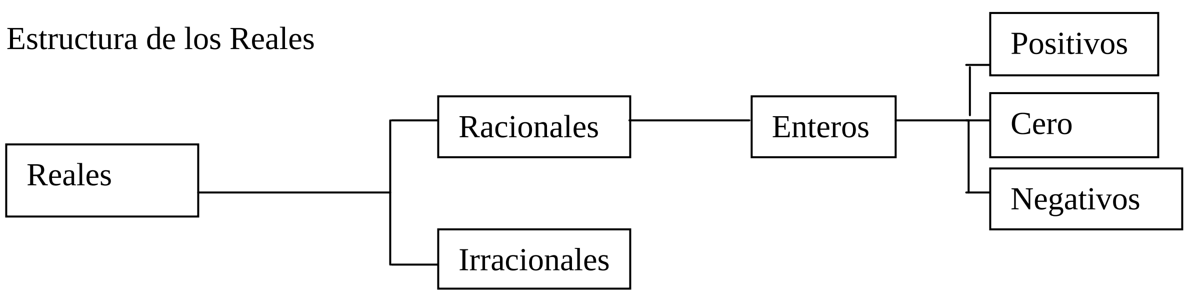
Existen números reales que no son racionales, como $\sqrt{2}$, denominados números irracionales. Ejemplos de irracionales son

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \pi, \frac{3}{\pi^2}$

El conjunto de todos los números reales, lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}$, y está formado por todos los racionales e irracionales.

Cuando mencionemos la palabra número sin adjetivo, estaremos hablando de número real.

Estructura de los Reales



Representación decimal de los reales.

En los racionales la parte decimal se repite, es periódica e infinita

Ejemplos:

$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000... = 0.5\overline{0}$ $\qquad \frac{9}{7} = 1.\overline{285714}$ $\qquad 3.547474747.... = \frac{3512}{990}$

Cuando el número de decimales es "finito", como en 0.5, en realidad es infinito, siendo ceros los que se encuentran a la derecha del cinco.

(La barra sobre algún bloque de dígitos indica que la secuencia de dígitos señalados se repite por siempre).

Si el número es irracional, la representación decimal es también infinita pero no es repetitiva, esto es, no es periódico

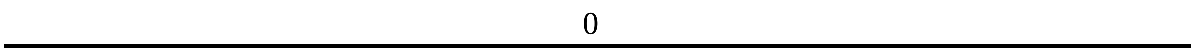
por ejemplo $\sqrt{2} = 1.414213562373095....$, $\qquad \pi = 3.141592653589793...$

$e = 2.718281828459045....$

Un número periódico como $3.5474747... = 3.5\overline{47}$, corresponde a un racional o cociente de enteros, en efecto si escribimos:

$$x = 3.5474747....$$
$$1000x = 3547.474747...$$
$$10x = 35.474747....,$$
y al restar, se anula la parte periódica
$$990x = 3512.0$$
$$x = \frac{3512}{990}$$

***Representación gráfica de los reales*.**
Los números reales se pueden representar como puntos de una recta.



a la cual llamaremos recta real o numérica.
En ella se selecciona un punto para el entero cero, llamado origen, seleccionando después una longitud determinada como unidad, se coloca sucesivamente esta unidad a la derecha del cero y se obtienen los enteros positivos, similarmente, colocándola a la izquierda se obtienen los enteros negativos. Cada real positivo x estará representado por un punto de la recta situado a x unidades a la derecha del cero y cada negativo –x estará representado por un punto situado a x unidades a la izquierda del cero, de esta manera cada real es representado mediante un punto de la recta y cada punto de la recta representará un determinado número real. Los racionales que no son enteros, se encuentran entre dos enteros consecutivos, los irracionales se pueden aproximar mediante una sucesión de racionales, cada vez más próximos al irracional.

***Orden en los reales*.**
Los reales están ordenados en la recta, en el sentido de que, dados dos números distintos ***a*** y ***b*** , uno queda a la derecha y otro a la izquierda.
Definición: Decimos que a es menor que b, escrito $a < b$, si $b - a$ es un número positivo .
Si a < b, el punto a se encuentra, en la recta numérica, a la izquierda de b.
De manera equivalente decimos que b es mayor que a, escrito b > a, cuando a < b.
($a \le b$ significa que $a < b$ o $a = b$)
Si a > 0 se dice que a es positivo y si a < 0, entonces a es negativo.
En la recta numérica los positivos son los puntos a la derecha del cero y los negativos los de la izquierda.

LOS NÚMEROS REALES TIENEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES BAJO LAS OPERACIONES USUALES DE SUMA Y PRODUCTO.

La suma y el producto son operaciones asociativas

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a(bc) = (ab)c$$

Son Conmutativas.

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

El producto es distributivo sobre la suma.

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(b + c)a = ba + ca$$

Existe un elemento neutro para la suma y uno para el producto.

Existe un real 0 tal que,
$a + 0 = 0 + a = a$ para cualquier real a
Existe un real $1 \neq 0$, tal que $a1 = 1a = a$

Inversos aditivos.
Cada número real a tiene un inverso aditivo $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Para los números distintos de cero existe el inverso multiplicativo.
Cada real a distinto de cero tiene un inverso multiplicativo $\frac{1}{a}$, tal que $a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1$.

(El cero no tiene inverso multiplicativo, esto es $\frac{1}{0}$ no representa ningún número real.)

RESTA Y COCIENTE DE REALES.
La resta, como operación inversa de la suma se define como:
$a - b = a + (-b)$
El cociente como operación inversa del producto se define como:
$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

USO DE LAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS REALES.

Para números reales $x, y.z, w$, cualesquiera

$(x+y)5zw = 5zw(x+y)$ por propiedad conmutativa

$$(x+y)(z+w) = (x+y)z + (x+y)w$$
$$= (xz + yz) + (xw + yw) = xz + yz + xw + yw$$

PROPIEDADES DE LOS INVERSOS ADITIVOS.

$-a = (-1)a$

$-(-a) = a$

$(-a)b = a(-b) = -(ab)$

$(-a)(-b) = ab$

$-(a+b) = -a-b$

$-(a-b) = b-a$

Ejemplos.

a) $-(x+5) = -x-5$

b) $-(x+2y-3z) = -x-2y+3z$, al eliminar el paréntesis precedido con signo menos, las cantidades que se encuentran dentro cambian de signo.

PROPIEDADES DE LOS INVERSOS MULTIPLICATIVOS.

a) $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

b) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

e) $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{c}$

f) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$

Ejemplo.

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5(120)+7(36)}{120(36)} = \frac{4[5(30)+7(9)]}{120(9)(4)} = \frac{150+63}{1080} = \frac{213}{1080} = \frac{3(71)}{3(360)} = \frac{71}{360}$$

En este caso u otros similares resulta mas conveniente encontrar el mínimo común denominador MCD, que en este caso es 360.

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{120}=\frac{50}{360}+\frac{21}{360}=\frac{71}{360}$$

para obtener el MCD, se descomponen los denominadores en primos
$36 = 2(2)(3)(3) = (2^2)(3^2)$ $120 = 2(2)(2)(3)(5) = (2^3)(3)(5)$
El MCD es el producto de todos los factores primos diferentes elevados a la potencia más elevada de cada uno de ellos, así, para este caso MCD = $(2^3)(3^2)(5) = 360$.

EXPONENTES ENTEROS.

Al multiplicar un número, digamos 5, consigo mismo tres veces, se escribe $(5)(5)(5)=125$, en lugar de escribir los tres factores se escribe se acostumbra poner 5^3 esto es : $5^3=(5)(5)(5)$.
En general para cualquier real a y un n entero positivo, la n-ésima potencia de a es:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots a}_{nfactores}$$

a es la base de la potencia y *n* es el exponente.
Notemos que :

$$a^4a^2=(a\cdot a\cdot a\cdot a)(a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^6=a^{4+2}$$

En general

$$a^ma^n=a^{m+n}$$

siempre y cuando m y n sean enteros positivos.

Si queremos que esta regla siga siendo verdadera, incluso cuando m y n sean cero o enteros negativos, entonces, debemos tener:

$$a^0a^n=a^{o+n}=a^n$$

pero esto solo ocurre si $a^0=1$
De la misma manera debemos tener que

$$a^na^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$$

y esto es verdadero si

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

De modo que, resumiendo, si *a* es cualquier real y *n* un entero positivo, entonces

$a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

LEYES DE LOS EXPONENTES.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejercicios.
Hacer varios ejercicios

Notación científica.

La notación exponencial es muy útil para escribir números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana al Sol, alfa Centauri, se encuentra a unos 40 000,000,000,000 Kilómetros. y la masa de un átomo de hidrógeno es de aproximadamente 0.00000000000000000000000166 gramos, estas cantidades es conveniente escribirlas en notación científica.

Un número positivo x se encuentra en notación científica si está escrito en la forma
$x = a \times 10^n$ donde $1 \le a \le 10$ y n es un entero
así

$4 \times 10^{13} = 40\,000,000,000,000$

$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$

en el primer caso el exponente positivo 13 indica que el punto decimal de 4 debe moverse 13 lugares a la derecha y en el segundo caso el exponente –24 indica que el punto decimal de 1.66 debe moverse 24 lugares hacia la izquierda.

Ejms. Escriba en notación científica los números 56 920 y 0.000093
Sol 56 920 = 5.692 x 10^4 0.000093 = 9.3 x 10^{-5}

En una calculadora obtenga el cuadrado del número 1 111 111.
Sol. La calculadora presenta el resultado1.2345676 12 que significa 1.2345676x10^{12}

Empleando una calculadora obtenga un resultado para $\frac{ab}{c}$, siendo $a = 0.00046$, $b = 1.697 \times 10^{22}$ y $c = 2.91 \times 10^{-18}$

sol. 2.7×10^{36}

redondeamos con 2.7 ya que uno de los datos a = 4.6 x 10^{-4} tiene solamente un decimal.

RADICALES.

Ya hemos visto el significado de potencias enteras como 2^5, ahora para darle significado a potencias fraccionarias como $2^{4/5}$, es necesario el concepto de radical.

El símbolo $\sqrt{\ }$, aplicado a un número , digamos por ejemplo $\sqrt{9}$,significa un número cuyo cuadrado es 9:

$\sqrt{a} = b$ significa $b^2 = a$ y $b \geq 0$

Dado que $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo si $a \geq 0$.

Ejm.

$\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$ y $4 \geq 0$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n-ésimas. La raíz n-ésima de *x*, es el número que al ser elevado a la n-ésima potencia, nos da *x*.

Definición

Si n es cualquier entero positivo, entonces la raíz n-ésima principal de *a* se define como:

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$

Si n es par, tenemos que $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Ejemplos.

$\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 81$ y $3 \geq 0$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = -8$

Las raíces de índice par de números negativos no están definidas como números reales

Por ejem. $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-16}$

La ecuación $x^4 = 31$ tiene dos soluciones reales $x = \pm\sqrt[4]{31}$.

La ecuación $x^5 = 31$ sólo tiene una solución real $x = \sqrt[5]{31}$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

5. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n es par $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

CUIDADO.
Evite cometer el error siguiente
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ esto es falso

pues es evidente que $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \neq a + b$

EXPONENTES RACIONALES.

Para dar un significado al símbolo $a^{\frac{1}{n}}$ de manera que sea consistente con las leyes de los exponentes, tendremos que

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{n/n} = a^1 = a$$

por lo que, a partir de la definición de raíz n-ésima

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

y como $a^{m/n} = \left(a^m\right)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

entonces se tiene

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES.
Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$, expresado en su forma más simplificada, donde m y n enteros y $n > 0$, definimos
$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$

Ejemplos. Páginas 22 y 23 Precálculo Stewart.

1. Evaluar: $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$
2. $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
3. Simplifique $\left(\sqrt[3]{a^2 b}\right)\left(\sqrt[3]{a^4 b}\right)$
4. Racionalice $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Variables y constantes.

Una variable es una letra que puede representar cualquier número en un conjunto dado, mientras que una constante representa un número fijo o específico.

Una expresión algebraica, tales como

$$2x^2 - 3x + 7 \qquad ax^2 + bx + c \qquad \frac{y^2 - 1}{y + 1} \qquad \frac{cx^2 y + dy^2 z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

son combinaciones de constantes como 2, -3, 7, *a*, *b*, *c*, *d* y variables *x*, *y*, *z*, realizadas con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y elevación a exponentes racionales.

El dominio de una variable en una expresión algebraica de esa variable, es el conjunto de valores que puede adoptar la variable de manera tal que la expresión tenga sentido en los números reales esto es que la combinación de valores o sustitución del valor en la expresión nos dé un número real.

Por ejemplo en la expresión $\frac{y^2 - 1}{y + 1}$, el dominio de la variable y, serán todos los reales excepto el número –1, ya que para este valor quedaría una división por cero.

Los tipos más simples de expresiones algebraicas sólo utilizan la suma, resta, producto y potencias enteras positivas, estas expresiones se conocen como polinomios. La forma general de un polinomio de grado *n* (donde n es un entero no negativo) en la variable *x* es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_i, $i = 0,1,2,...,n$ son constantes y $a_n \neq 0$, llamados coeficientes del polinomio. El grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable. Cualquier polinomio es una suma o resta de términos de la forma ax^k, llamados monomios, donde *a* es una constante y *k* un entero no negativo. Un binomio es la suma de dos monomios, un trinomio es la suma de tres monomios, y así sucesivamente.

Por ejemplo $2x^2 - 3x + 4$, $ax + b$ y $x^4 + 5x^3$, son polinomios de grado dos, 1 y 4, respectivamente; el primero es un trinomio, y los otros dos son binomios.

***Suma y resta de polinomios*.**

Sumamos y restamos polinomios empleando las propiedades de los números reales, la idea es combinar términos semejantes, que son términos con la misma variable elevada a la misma potencia y coeficientes iguales o diferentes, empleando la ley distributiva.

Por ejemplo,

$$3x^3 - 2x^3 + 2x + 3x - 5 = (3-2)x^3 + (2+3)x - 5 = x^3 + 5x - 5$$

En la resta de polinomios, debemos recordar que si un signo menos antecede a una expresión entre paréntesis, entonces cuando eliminamos dichos paréntesis todos los términos dentro del mismo cambian de signo.

Ejm. Calcule la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (3x^3 + 5x^2 - 4x)$.

Producto de polinomios.

Para multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes y se emplea las leyes de los exponentes para simplificar variables semejantes en los monomios.

Por ejemplo,

$$\left(3x^2yz^3\right)\left(-5xy^3z\right) = -15x^3y^4z^4$$

En el caso de polinomios se emplea la ley distributiva varias veces para multiplicar los monomios involucrados.

Así, para un producto de binomios se tiene:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Ejemplos.

a) $(5x-2)(3x+5) = 5x(3x+5) - 2(3x+5) = 15x^2 + 25x - 6x - 10 = 15x^2 + 19x - 10$

b) $3(x-1)(x+1) = 3[x(x+1) - 1(x+1)] = 3\left(x^2 + x - x - 1\right) = 3\left(x^2 - 1\right)$

Otros productos de expresiones algebraicas con radicales.

c) $\sqrt{x}\left(x^2 + 2x + \sqrt{x}\right) = x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x} = x^{5/2} + 2x^{3/2} + x$

d) $\left(1+\sqrt{x}\right)\left(2-3\sqrt{x}\right) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3\left(\sqrt{x}\right)^2 = 2 - \sqrt{x} - 3x$

Productos de polinomios con más de una variable.

e).

$$\begin{aligned}(x-y)\left(x^2 - xy + y^2\right) &= x\left(x^2 - xy + y^2\right) - y\left(x^2 - xy + y^2\right)\\ &= x^3 - x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 + y^3\\ &= x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3\end{aligned}$$

Algunos productos notables.

Algunos productos se presentan con mucha frecuencia que conviene recordarlos, como son los siguientes

1. $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$
2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3. $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
4. $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. $(A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right) = A^3 - B^3$
7. $(A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right) = A^3 + B^3$

Ejemplos. Poner ejemplos de la pag. 29 del Precálculo.

FACTORIZACIÓN.

Empleando la propiedad distributiva se pueden realizar como hemos visto los productos, al proceder en orden inverso, esto es dado el producto podemos factorizar una expresión.
Por ejemplo.
$(x-2)(x+2)=x^2-4$ de acuerdo a el producto correspondiente
pero si nos piden factorizar la expresión x^2-4, la identificamos como la diferencia de cuadrados , x^2-2^2, y aplicamos el producto notable correspondiente, en orden inverso, esto es:
$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
$x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

Si varios términos tienen un factor común este se puede factorizar empleando la ley distributiva.
Ejemplo.
Factorizar la expresión $8x^4y^2+6x^3y^3-2xy^4$; aquí nos damos cuenta sin dificultad que todos los términos son múltiplos de dos y que en todos los términos figura por lo menos una *x* y una y^2, de manera que un factor común de todos los términos es $2xy^2$ y al factorizar se tiene:
$8x^4y^2+6x^3y^3-2xy=2xy^2\left(4x^3+3x^2y-y^2\right)$

Como factorizar un polinomio cuadrático de la forma x^2+bx+c**.**
Si observamos que
$(x+r)(x+s)=x^2+(r+s)x+rs$
podemos intentar factorizar la forma cuadrática escogiendo números r y s tales que
$r+s=b$ y $rs=c$

Factorización de x^2+bx+c ***por ensayo y error.***
Factorizar: $x^2+7x+12$
Solución: En este caso, $rs=12$ y $r+s=7$, por lo que r y s deben ser factores de 12 cuya suma sea 7
En la siguiente tabla se enumeran de manera ordenada los factores de 12 y se puede ver cuales de ellos suman 7

r	1	2	3
s	12	6	4
suma	23	8	7

por lo tanto $r=3$ y $s=4$ y la factorización quedaría: $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$.

EXPRESIONES FRACCIONARIAS.

Un cociente de expresiones algebraicas se conoce como una expresión fraccionaria, las cuales se encuentran bien definidas para todos aquellos valores de sus variables que no hagan cero el denominador, en particular si el numerador y denominador son polinomios, la expresión es llamada racional.

Ejemplo. $\frac{5x^2+2x-3}{x^2-1}$, es una expresión racional definida para número diferente de 1 y –1, ya que para estos valores se anula el denominador.

Al simplificar expresiones fraccionarias se factoriza tanto el numerador como el denominador y se emplea la siguiente propiedad de las fracciones

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}, \text{ si } C\neq 0$$

la cual nos indica que podemos cancelar factores comunes distintos de cero del numerador y del denominador..

Ejms:

a) Simplificar $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}$, si $x\neq 1$

b) Simplificar

$$\frac{2x^3+5x^2-3x}{6-x-x^2}=\frac{x(2x^2+5x-3)}{-(x^2+x-6)}=\frac{x(2x-1)(x+3)}{-(x-2)(x+3)}=\frac{x(2x-1)}{2-x}, \text{ si } x\neq -3$$

al multiplicar expresiones fraccionarias, empleamos la siguiente propiedad

$$\frac{A}{B}\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

al dividir expresiones fraccionarias se emplea la propiedad

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$$, (regla de la herradura)

Al sumar o restar fracciones, es conveniente primero obtener un denominador común y después emplear la propiedad

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

Aunque si bien es cierto que cualquier denominador común funciona, es mejor emplear el mínimo común denominador (MCD). El MCD se encuentra factorizando cada denominador y tomando el producto de los factores diferentes, utilizando la potencia más elevada que figure en cualquiera de los factores.

Ejemplos. Realice las operaciones y simplifique.

a) $\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{(x-4)(x^2+5x+6)}{(x^2-4)(x^2-3x-4)} = \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

b) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2}$, aquí el MCD es simplemente el producto $(x-1)(x+2)$, por lo que

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3(x+2)+x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$$

c) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$, en este caso el MCD será $(x-1)(x+1)^2$

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}$$

c) Simplifique la expresión compuesta $\frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h}$

Sol.

$$\frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h} = \frac{\frac{a^2-(a+h)^2}{a^2(a+h)^2}}{\frac{h}{1}} = \frac{a^2-(a+h)^2}{ha^2(a+h)^2} = \frac{a^2-a^2-2ah-h^2}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{h(2a+h)}{ha^2(a+h)^2}$$

$$= -\frac{2a+h}{a^2(a+h)^2}$$

Cuando maneje fracciones evite cometer el siguiente error

$\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$, **esta igualdad no es cierta**

Por ejemplo

$$\frac{2}{1+1} = \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} = 2+2$$

$1 = 4$ lo cual es falso

Otros errores que se cometen con frecuencia, tal vez por confundir algunas expresiones válidas del producto y querer aplicarlas a la suma, son las siguientes:

expresión correcta	expresión incorrecta
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad (a,b \geq 0)$	$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2b^2} = ab, \quad (a,b \geq 0)$	$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a+b}{a} = b$

Ejercicios:

Simplifique las expresiones.

a) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

b) $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15} \div \dfrac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$

c) $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}}$

d) $\dfrac{1}{x^2+3x+2} - \dfrac{1}{x^2-2x-3}$

e) $\dfrac{\dfrac{5}{x-1} - \dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}$

ECUACIONES.

Una ecuación es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas son iguales. por ejemplo,

$3+5=8$

es una ecuación, por cierto nada interesante, ya que simplemente expresa un hecho aritmético simple. La mayor parte de las ecuaciones en álgebra contienen variables que son símbolos que representan números. En las ecuaciones

$(z-4)(z+4)=z^2-16$ y $4x+3=7$

las letras *z*, *x* son variables. La primera de estas ecuaciones es verdadera para cualquier valor de z, por lo que se le llama una **identidad .** La segunda ecuación no es verdadera, más que para cierto valor de *x*. Los valores de la variable que hacen verdadera a una ecuación se les llama **raíces** o **soluciones** de la ecuación y el proceso de encontrar las raíces se le llama resolución de la ecuación.

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes, si tienen las mismas soluciones. Resolver una ecuación consiste en ir pasando de una ecuación a otra equivalente, hasta arribar a una ecuación equivalente, en cuyo primer miembro se encuentre sola la variable incógnita de la ecuación, esto es, que se encuentre "despejada".

Así para resolver la ecuación $4x+3=7$, escribimos la sucesión de ecuaciones equivalentes:

$$4x+3=7$$

$$4x+3+(-3)=7+(-3)$$

$$4x+0=4$$

$$4x=4$$

$$\frac{1}{4}\cdot 4x=\frac{1}{4}\cdot 4$$

$$x=1$$

esta última ecuación nos indica la solución

los pasos de la resolución se pueden abreviar poniendo

$$4x+3=7$$

$$4x=7-3=4$$

$$4x=4$$

$$x=\frac{4}{4}=1$$

Para verificar que la respuesta es correcta se sustituye el valor encontrado en la ecuación original y se checa que la "cumple" o "satisface".

$$4(1)+3=7$$

$$4+3=7$$

$7=7$ ¡correcto!

Ejemplo. Resuelva la ecuación.

$7x-4=3x+8$.

Solución:

$7x - 3x = 8 + 4$

$4x = 12$

$x = 3$

Verificación:

$7(3) - 4 = 3(3) + 8$

$21 - 4 = 9 + 8$

$17 = 17$ ¡correcto!

ECUACIONES LINEALES.

Las ecuaciones lineales o de primer grado son aquellas en las cuales solamente figuran constante o múltiplos diferentes de cero de la variable elevada a la potencia uno, todas ellas equivalentes a una ecuación de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$.

La ecuación resuelta anteriormente es lineal y también lo son las ecuaciones

$4x - 5 = x + 2; \quad 2x = \frac{1}{2}x - 5$

En cambio las ecuaciones

$$x^2 + x - 8 = 0; \quad \sqrt{x} - \frac{2}{x} = 3x - 1$$

no son lineales.

Ejemplo. Una ecuación que se reduce a una lineal.

La ecuación

$$\frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{2x-3}$$

se puede reducir a una lineal ya que, para cuando $x \neq -1$ y $x \neq \frac{3}{2}$, se puede escribir

$x(2x-3) = (2x+1)(x+1)$

$2x^2 - 3x = 2x^2 + 3x + 1$

$-6x = 1$

$$x = -\frac{1}{6}$$

verificando la respuesta.

$$LI = \frac{-\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{1}{5}$$

$$LD = \frac{2\left(-\frac{1}{6}\right) + 1}{2\left(-\frac{1}{6}\right) - 3} = -\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}} = -\frac{1}{5}, \quad \text{esto es } LI = LD$$

En muchas fórmulas de la física se involucran varias variables y frecuentemente se requiere despejar una de ellas en termino de las otras, lo cual se indica diciendo que resolvemos la ecuación para tal o cual variable. Por ejemplo, para la Ley de Gravitación Universal de Newton se tiene la expresión

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

y queremos resolverla para la variable M, esto es se pide despejar la M.
Sol.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$r^2F = GmM$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M$$

$$M = \frac{r^2F}{Gm}$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS.

Ya hemos visto que la ecuaciones de primer grado en una variable son las equivalentes a una de la forma $ax + b = 0$, en cambio las cuadráticas son de segundo grado y equivalentes a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son números reales con } a \neq 0$$

algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver factorizando la forma cuadrática y empleando la siguiente propiedad básica de los reales:

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{y/o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (u otra), entonces la resolvemos igualando a cero cada uno de los factores. ***Este método se puede aplicar únicamente cuando el lado derecho de la ecuación es cero.***

Ejemplo: Resolución de una ecuación mediante factorización.
Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.
Sol.

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x + 8)(x - 3) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -8$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

Una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se puede factorizar como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$ y las soluciones son: $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. soluciones que se pueden abreviar escribiendo $x = \pm\sqrt{c}$

Esto es:

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$

Ejemplo. Resolver las cuadráticas simples:
a) $x^2 = 3$ b) $(x-4)^2 = 5$

Solución:
a) Aplicando lo que decimos en el recuadro anterior se tiene $x = \pm\sqrt{3}$
b) Pensemos que $X = x-4$, entonces por el mismo principio anterior $X = x-4 = \pm\sqrt{5}$ de manera que $x = 4\pm\sqrt{5}$, esto es, las soluciones son $x = 4+\sqrt{5}$ y $x = 4-\sqrt{5}$.
Este último ejemplo ilustra que una ecuación cuadrática de la forma $(x+a)^2 = c$, se puede resolver extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros $x+a = \pm\sqrt{c}$ y despejando la incógnita $x = -a\pm\sqrt{c}$. En una ecuación de esta forma, el lado izquierdo es un cuadrado perfecto: es el cuadrado de una expresión lineal en *x*.

TÉCNICA DE COMPLETAR EL CUADRADO.
Si una ecuación cuadrática no se puede factorizar fácilmente, entonces podemos resolverla utilizando la técnica de completar el cuadrado. Esta consiste en sumar una constante a una expresión, para convertirla en un cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer de la expresión $x^2 - 6x$ un cuadrado perfecto, debemos de sumar el número 9, ya que:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

. En general, para completar el cuadrado de $x^2 + bx$, debemos de agregar la cantidad $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es la mitad del coeficiente del termino de primer grado elevado al cuadrado. Ya que haciendo esto podemos escribir la identidad

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Resumiendo.

CÓMO COMPLETAR EL CUDRADO.
Para hacer de $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

Ejm. Resolución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado.
Resolver $x^2 - 8x + 13 = 0$
Sol.

$x^2 - 8x + 13 = 0$

$x^2 - 8x = -13$

$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16,$ se aumenta el 16 en ambos miembros para conservar la igualdad

$(x-4)^2 = 3,$ cuadrado perfecto

$x\text{-}4 = \pm\sqrt{3},$ tomando la raíz cuadrada en ambos miembros

$x = 4 \pm \sqrt{3},$ estas son las dos raíces de la ecuación

Ejm. Resolver $3x^2 - 12x + 4 = 0$.
Sol. Si el coeficiente de x^2 , es diferente de la unidad como en este caso, primero se divide cada uno de los términos de la ecuación por el coeficiente de este termino

$$x^2 - 3x + \frac{4}{3} = 0$$

y después se procede como en el caso anterior

$$x^2 - 4x = -\frac{4}{3}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4 - \frac{4}{3}$$

$$(x - 2)^2 = \frac{8}{3}$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$x = 2 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$$

Apliquemos la técnica de completar el cuadrado a la ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a fin de obtener una fórmula en términos de los coeficientes a, b y c.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y ahora despejando a la *x*, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fórmula que nos da las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, en términos de sus coeficientes.
Si llamamos con el nombre de ***discriminante de la forma cuadrática*** a la cantidad $D = b^2 - 4ac$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden escribir:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Es evidente que si:

$$D = 0, \text{ entonces } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ las raíces son reales e iguales}$$
$$D > 0, \text{ entonces las raíces } x_1 \text{ y } x_2, \text{ son reales y diferentes}$$
$$D < 0, \text{ entonces las raíces son números complejos conjugados.}$$

En el último caso, dentro del radical queda un número negativo y las raíces cuadradas de números negativos no son reales, son llamados imaginarios, como por ejemplo $\sqrt{-3}$, el cual se puede escribir:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1)\cdot 3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}\cdot i$$

siendo $\sqrt{-1} = i$ un número no real, llamado la unidad imaginaria. Un número de la forma $a + b\cdot i$, es llamado un número complejo. La pareja de complejos $a + b\cdot i$ y $a - b\cdot i$, son llamados complejos conjugados.

Ejemplos. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas, empleando la fórmula general:
a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$
Soluciones:
a) En esta ecuación a = 3, b = -5 y c = -1. El discriminante de la forma cuadrática, en este caso es: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-1) = 25 + 12 = 37$. De manera que las raíces son reales y diferentes y ellas son

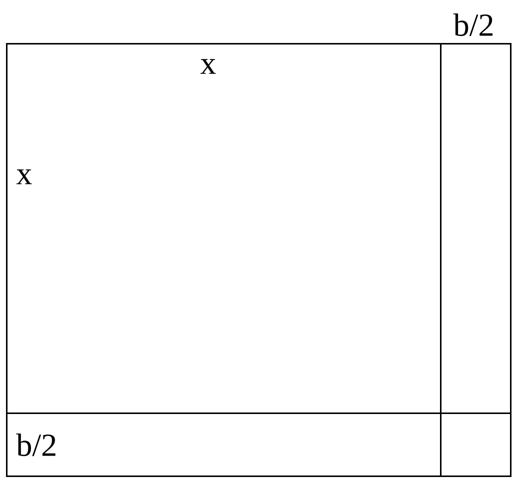
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{37}}{6}, \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{6}$$

b) Para esta ecuación a = 4 , b = 12 y c = 9.
El discriminante será $D = (12)^2 - 4(4)(9 = 144 - 144 = 0$
De manera que las soluciones son reales e iguales al número $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

c) En este caso a =1, b = 2   y   c = 2. El discriminante es $D = 4 - 8 = -4$
De modo que las raíces serán complejas conjugadas. No hay soluciones reales.
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2 \cdot i}{2} = -1 \pm i$, esto es: $x_1 = -1 + i$ y $x_2 = -1 - i$

EJERCICIOS.

Ejercicio1. En el siguiente diagrama se puede observar que para completar el cuadrado perfecto a la suma de áreas $x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$, se hace necesario agregar el área del pequeño cuadrado del ángulo inferior derecho de la figura, que es igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$



De ahí que para completar el cuadrado a la expresión $x^2 + bx$, es necesario agregar la cantidad $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, para obtener el cuadrado prefecto $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ejercicio2. Determine el error cometido en la solución siguiente, y resuelva correctamente.
$x^2 + 6x + 5 = x^2 - 1$
$(x+5)(x+1) = (x-1)(x+1)$,   factorizando
$x + 5 = x\text{-}1$,   dividiendo por $(x+1)$
$5 = -1$, restando x en ambos lados.

Sol. La ecuación original es equivalente a $6x + 5 = -1$, cuya solución es $x = -1$
El error consiste que al dividir por $x + 1$, que de hecho es cero, ya que $x = -1$.