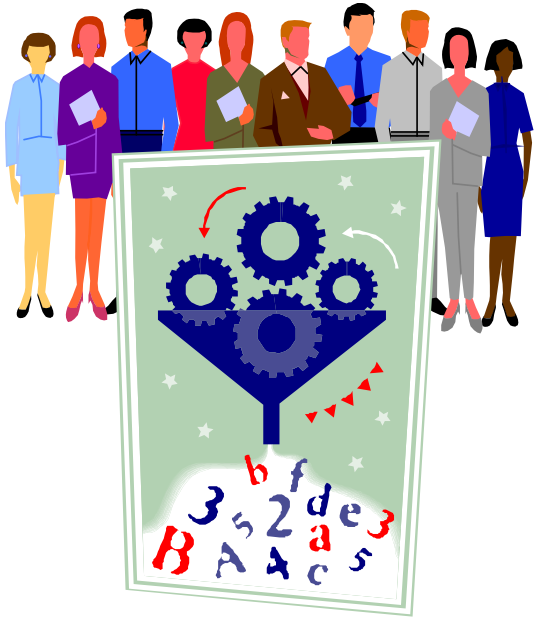
Estadística

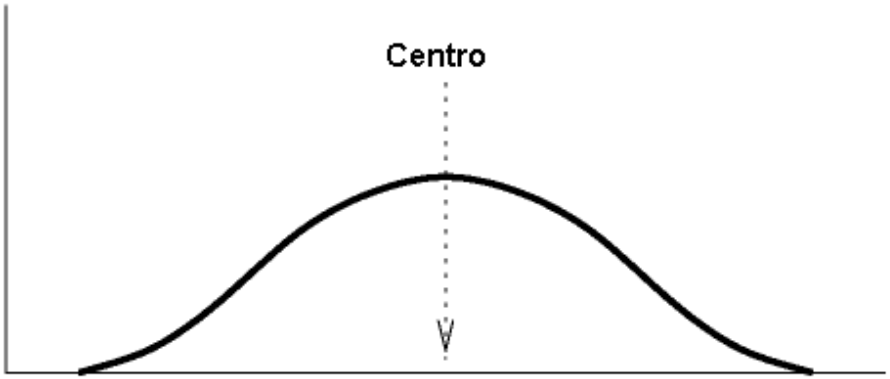
Tema 2: Estadísticos

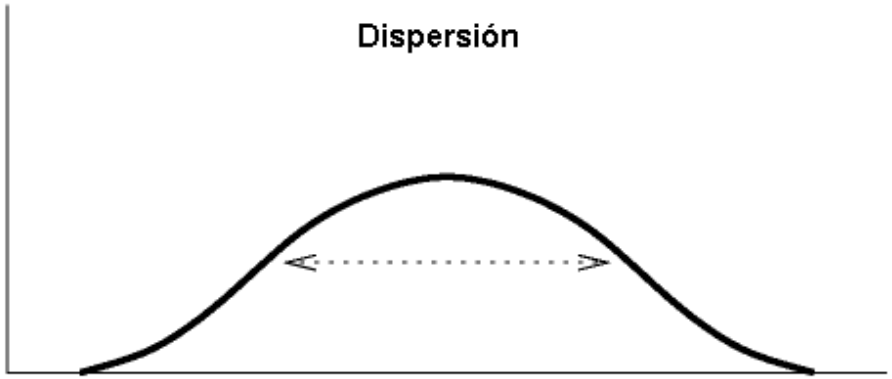
Parámetros y estadísticos

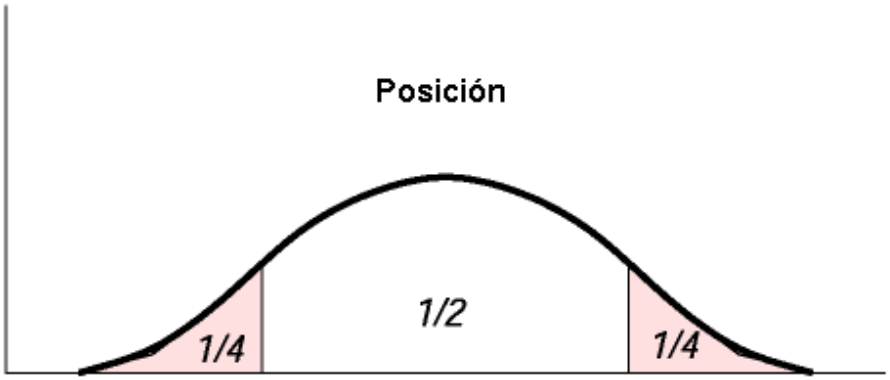
- Parámetro: Es una cantidad numérica calculada sobre una población
  - La altura media de los individuos de un país
  - La idea es resumir toda la información que hay en la población en unos pocos números (parámetros).
- Estadístico: Ídem (cambiar población por muestra)
  - La altura media de los que estamos en este aula.
    - Somos una muestra (¿representativa?) de la población.
  - Si un estadístico se usa para aproximar un parámetro también se le suele llamar estimador.

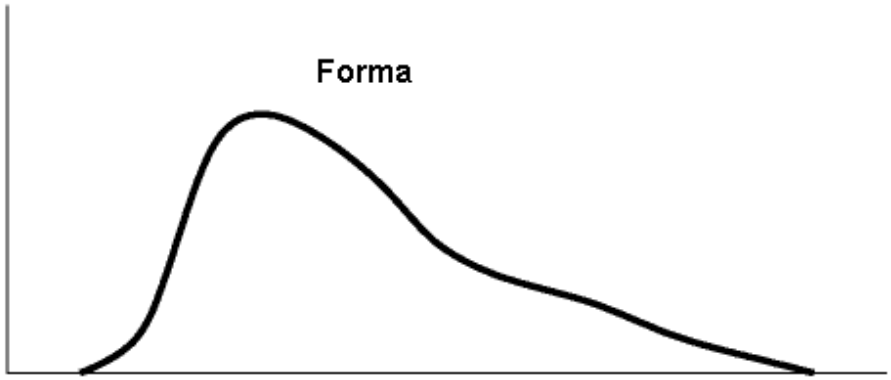


Normalmente nos interesa conocer un parámetro, pero por la dificultad que conlleva estudiar a ***TODA*** la población, calculamos un estimador sobre una muestra y "confiamos" en que sean próximos. Más adelante veremos como elegir muestras para que el error sea "confiablemente" pequeño.


Centro


Dispersión


Posición
1/4
1/2
1/4


Forma

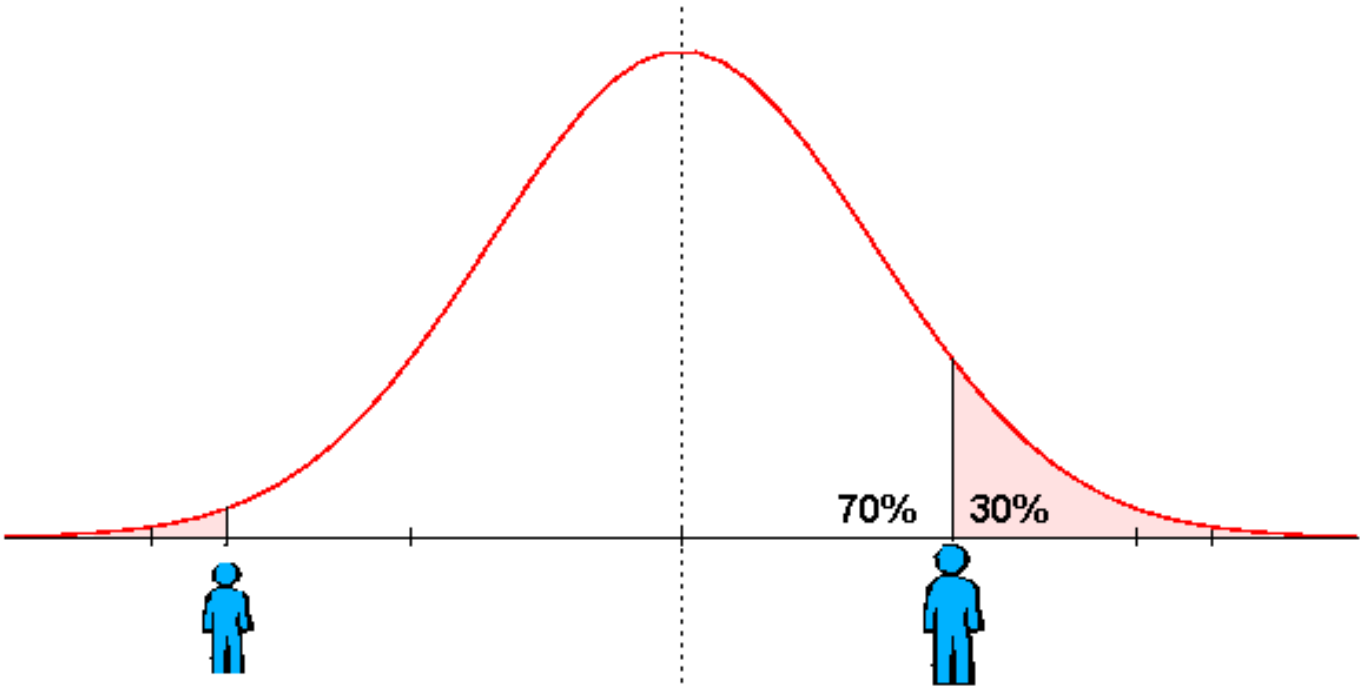
Un brevísimo resumen sobre estadísticos

- Posición
  - Dividen un conjunto ordenado de datos en grupos con la misma cantidad de individuos.
    - Cuantiles, percentiles, cuartiles, deciles,...
- Centralización
  - Indican valores con respecto a los que los datos parecen agruparse.
    - Media, mediana y moda
- Dispersión
  - Indican la mayor o menor concentración de los datos con respecto a las medidas de centralización.
    - Desviación típica, coeficiente de variación, rango, varianza
- Forma
  - Asimetría
  - Apuntamiento o curtosis

Estadísticos de posición

- Se define el **cuantil** de orden α como un valor de la variable por debajo del cual se encuentra una frecuencia acumulada α.

- Casos particulares son los percentiles, cuartiles, deciles, quintiles,...



Estadísticos de posición

- **Percentil** de orden k = cuantil de orden k/100
  - La mediana es el percentil 50
  - El percentil de orden 15 deja por debajo al 15% de las observaciones. Por encima queda el 85%

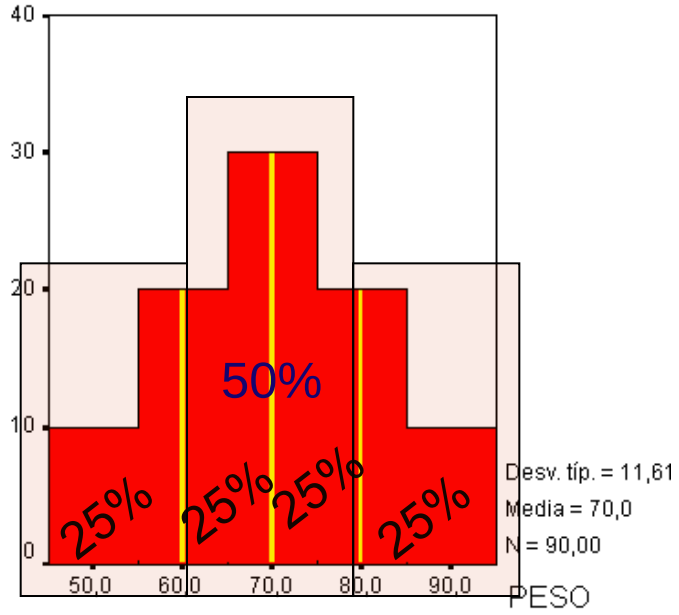
- **Cuartiles**: Dividen a la muestra en 4 grupos con frecuencias similares.
  - Primer cuartil = Percentil 25 = Cuantil 0,25
  - Segundo cuartil = Percentil 50 = Cuantil 0,5 = mediana
  - Tercer cuartil = Percentil 75 = cuantil 0,75

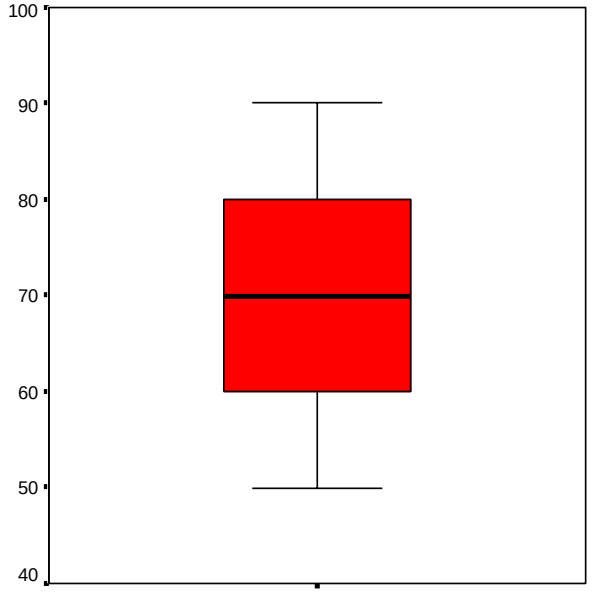
Ejemplos

- El 5% de los recién nacidos tiene un peso demasiado bajo. ¿Qué peso se considera “demasiado bajo”?
  - Percentil 5 o cuantil 0,05
- ¿Qué peso es superado sólo por el 25% de los individuos?
  - Percentil 75
- El colesterol se distribuye simétricamente en la población. Se considera patológico los valores extremos. El 90% de los individuos son normales ¿Entre qué valores se encuentran los individuos normales?
  - Entre el percentil 5 y el 95
- ¿Entre qué valores se encuentran la mitad de los individuos “más normales” de una población?
  - Entre el cuartil 1º y 3º

Ejemplo

- ¿Qué peso no llega a alcanzar el 25% de los individuos?
  - Primer cuartil = percentil 25 = 60 Kg.
- ¿Qué peso es superado por el 25% de los individuos?
  - Tercer cuartil= percentil 75= 80 kg.
- ¿Entre qué valores se encuentra el 50% de los individuos con un peso “más normal”?
  - Entre el primer y tercer cuartil = entre 60 y 80 kg.
  - Obsérvar que indica cómo de dispersos están los individuos que ocupan la “parte central” de la muestra. Ver más adelante rango intercuartílico.
  - Los diagramas de caja (‘boxplot’) sintetizan esta información (y algo más).





Estadísticos

PESO

Percentiles	25	60,00
	50	70,00
	75	80,00

Ejemplo

Número de años de escolarización

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
3	5	,3	,3
4	5	,3	,7
5	6	,4	1,1
6	12	,8	1,9
7	25	1,7	3,5
8	68	4,5	8,0
9	56	3,7	11,7
10	73	4,8	16,6
11	85	5,6	22,2
12	461	30,6	52,8
13	130	8,6	61,4
14	175	11,6	73,0
15	73	4,8	77,9
16	194	12,9	90,7
17	43	2,9	93,6
18	45	3,0	96,6
19	22	1,5	98,0
20	30	2,0	100,0
Total	1508	100,0	

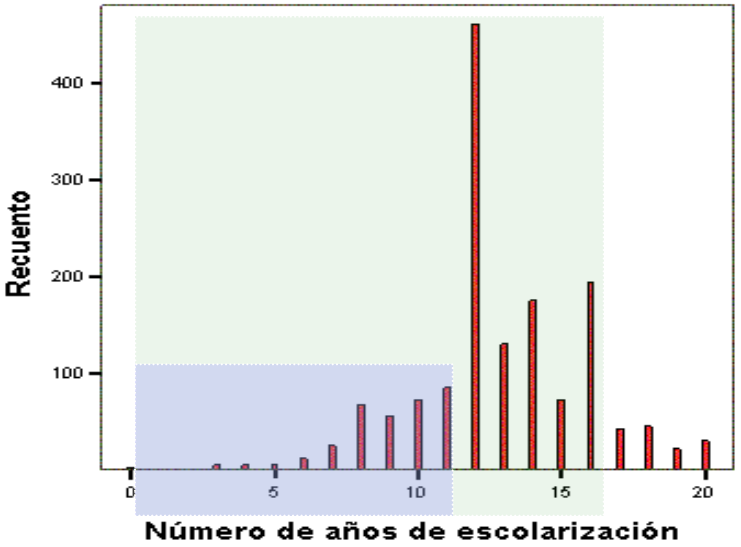
≥20%?

≥ 90%?

Estadísticos

Número de años de escolarización

N	Válidos	1508
	Perdidos	0
Media		12,90
Mediana		12,00
Moda		12
Percentiles	10	9,00
	20	11,00
	25	12,00
	30	12,00
	40	12,00
	50	12,00
	60	13,00
	70	14,00
	75	15,00
	80	16,00
	90	16,00



Centralización

Añaden unos cuantos casos particulares a las medidas de posición. En este caso son medidas que buscan posiciones (valores) con respecto a los cuales los datos muestran tendencia a agruparse.

- Media (‘mean’) Es la media aritmética (promedio) de los valores de una variable. Suma de los valores dividido por el tamaño muestral.
  - Media de 2,2,3,7 es (2+2+3+7)/4=3,5
  - Conveniente cuando los datos se concentran simétricamente con respecto a ese valor. Muy sensible a valores extremos.
  - Centro de gravedad de los datos

- Mediana (‘median’) Es un valor que divide a las observaciones en dos grupos con el mismo número de individuos (percentil 50). Si el número de datos es par, se elige la media de los dos datos centrales.
  - Mediana de 1,2,4,**5**,6,6,8 es 5
  - Mediana de 1,2,4,**5**,**6**,6,8,9 es (5+6)/2=5,5
  - Es conveniente cuando los datos son asimétricos. No es sensible a valores extremos.
    - Mediana de 1,2,4,**5**,6,6,800 es 5. ¡La media es 117,7!

- Moda (‘mode’) Es el/los valor/es donde la distribución de frecuencia alcanza un máximo.

Algunas fórmulas

- Datos sin agrupar: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
  - Media

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

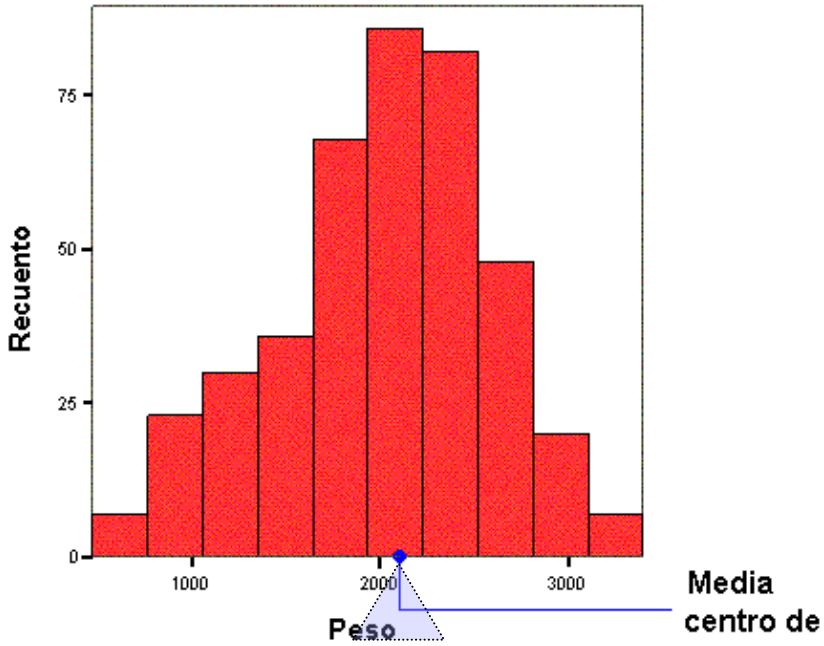
- Datos organizados en tabla
  - si está en intervalos usar como x_i las marcas de clase. Si no ignorar la columna de intervalos.
  - Media

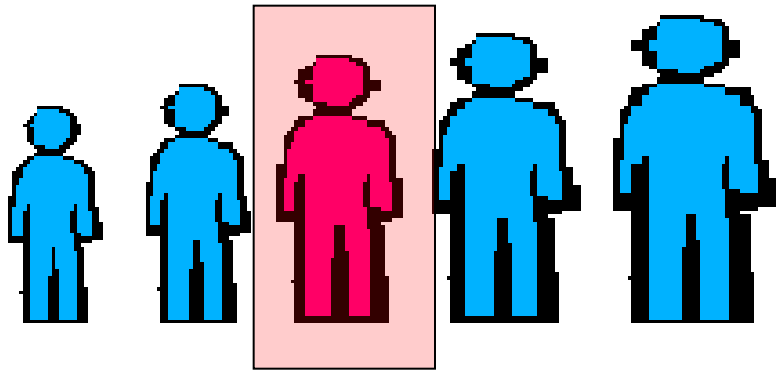
$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n}$$

Variable		fr.	fr. ac.
$L_0 - L_1$	x_1	n_1	N_1
$L_1 - L_2$	x_2	n_2	N_2
...			
$L_{k-1} - L_k$	x_k	n_k	N_k
n			

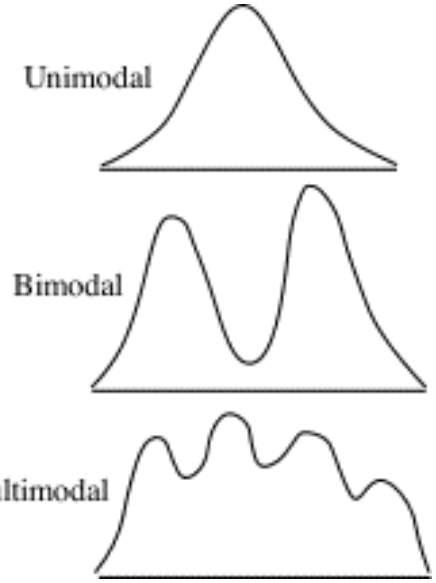
  - Cuantil de orden α
    - i es el menor intervalo que tiene frecuencia acumulada superior a α ·n
    - α=0,5 es mediana

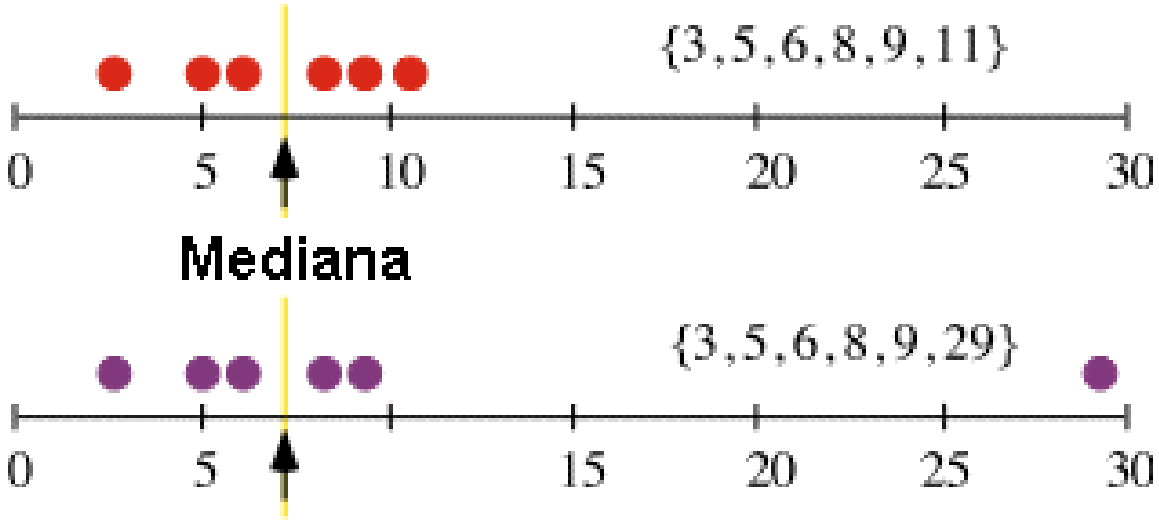
$$C_\alpha = L_{i-1} + \frac{\alpha \cdot n - N_{i-1}}{n_i}(L_i - L_{i-1})$$





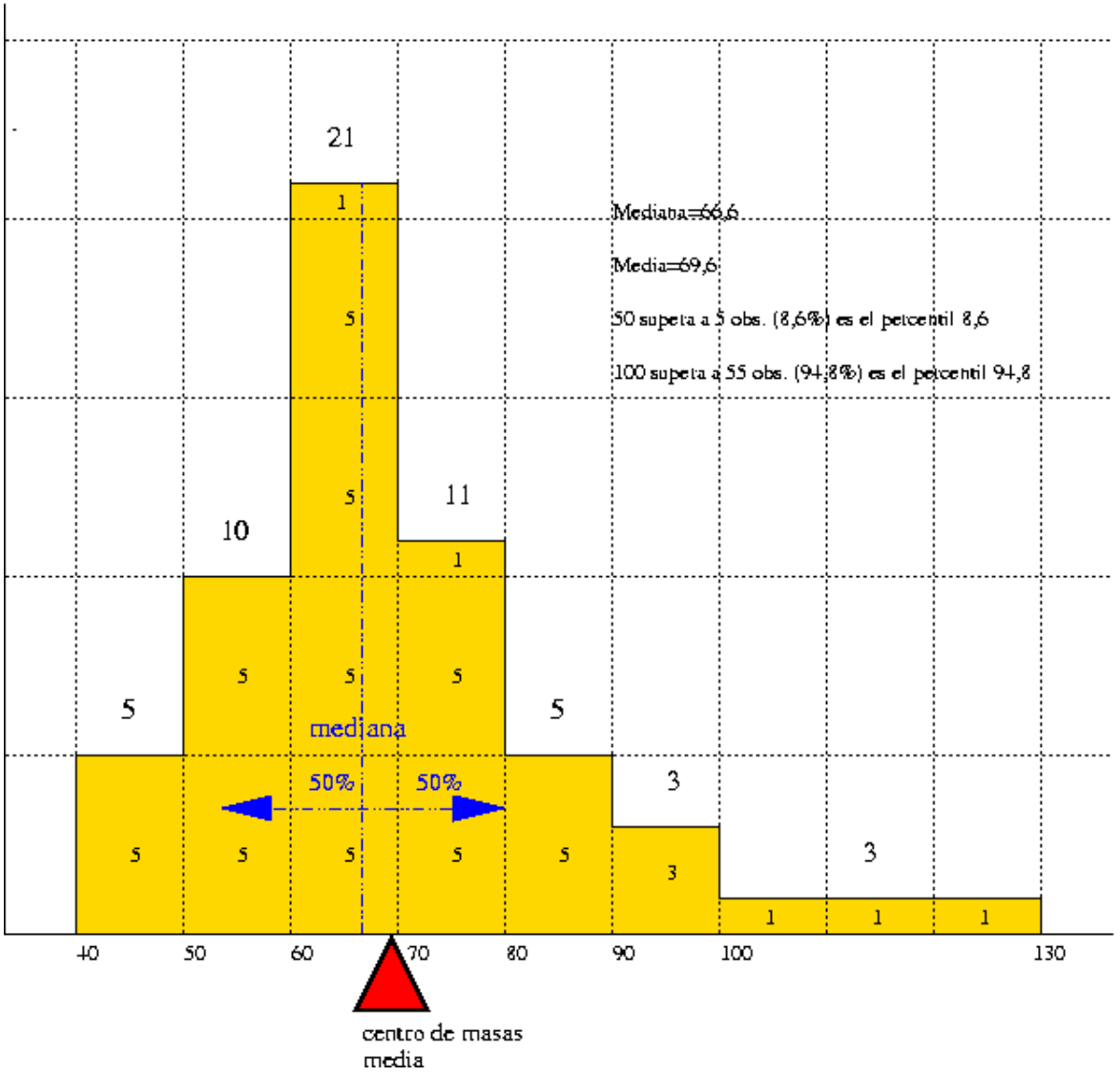
Altura mediana





Ejemplo con variables continuas

Peso	M. Clase	frec	Fr. acum.
40 – 50	45	5	5
50 – 60	55	10	15
60 – 70	65	21	36
70 - 80	75	11	47
80 - 90	85	5	52
90 - 100	95	3	55
100 – 130	115	3	58



En el histograma se identifica “unidad de área” con “individuo”.

Para calcular la media es necesario elegir un punto representante del intervalo: La marca de clase.

La media se desplaza hacia los valores extremos. No coincide con la mediana. Es un punto donde el histograma “estaría en equilibrio” si tuviese masa.

Ejemplo (continuación)

Peso	M. Clase	Fr.	Fr. ac.
40 – 50	45	5	5
50 – 60	55	10	15
60 – 70	65	21	36
70 - 80	75	11	47
80 - 90	85	5	52
90 - 100	95	3	55
100 – 130	115	3	58
58			

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \frac{45 \cdot 5 + 55 \cdot 10 + \ldots + 115 \cdot 3}{58} = 69,3$$

$$Mediana = C_{0,5} = L_{i-1} + \frac{0,5 \cdot 58 - N_{i-1}}{n_i}(L_i - L_{i-1})$$

$$= 60 + \frac{0,5 \cdot 58 - 15}{21}(70 - 60) = 66,\widehat{6}$$

$$P_{75} = C_{0,75} = L_{i-1} + \frac{0,75 \cdot 58 - N_{i-1}}{n_i}(L_i - L_{i-1}) = 70 + \frac{43,5 - 36}{11}(80 - 70) = 76,8$$

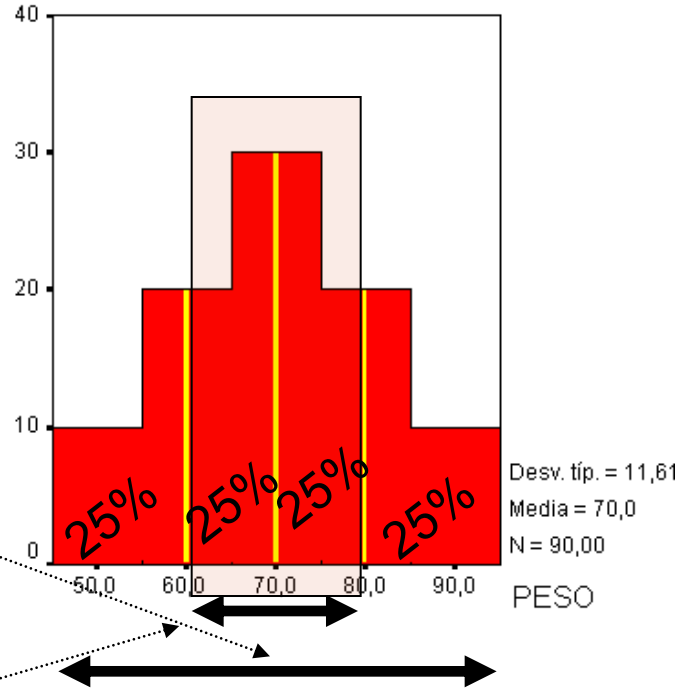
- Moda = marca de clase de (60,70] = 65
  - Cada libro ofrece una fórmula diferente para la moda (difícil estar al día.)

Variabilidad o dispersión

- Los estudiantes de Bioestadística reciben diferentes calificaciones en la asignatura (variabilidad). ¿A qué puede deberse?
  - Diferencias individuales en el conocimiento de la materia.
- ¿Podría haber otras razones (fuentes de variabilidad)?
- Por ejemplo supongamos que todos los alumnos poseen el mismo nivel de conocimiento. ¿Las notas serían las mismas en todos? Seguramente No.
  - Dormir poco el día del examen, el croissant estaba envenenado...
    - Diferencias individuales en la habilidad para hacer un examen.
  - El examen no es una medida perfecta del conocimiento.
    - Variabilidad por error de medida.
  - En alguna pregunta difícil, se duda entre varias opciones, y al azar se elige la mala
    - Variabilidad por azar, aleatoriedad.

Medidas de dispersión

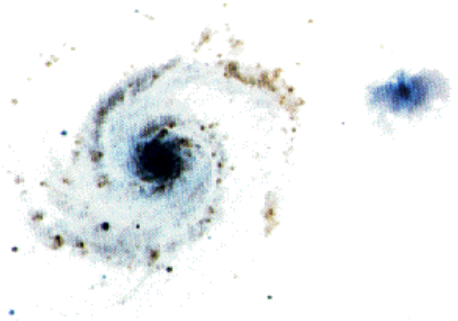
Miden el grado de dispersión (variabilidad) de los datos, independientemente de su causa.



- Amplitud o Rango ('range'):
  La diferencia entre las observaciónes extremas.
  - 2,1,4,3,8,4. El rango es 8-1=7
  - Es muy sensible a los valores extremos.

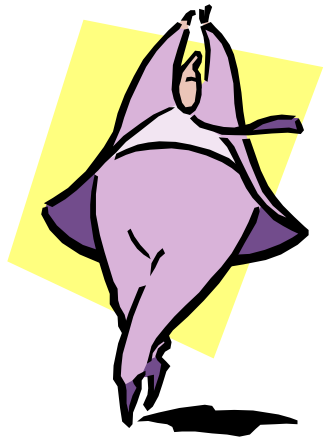
- Rango intercuartílico ('interquartile range'):
  - Es la distancia entre el primer y tercer cuartil.
    - Rango intercuartílico = $P_{75} - P_{25}$
  - Parecida al rango, pero eliminando las observaciones más extremas inferiores y superiores.
  - No es tan sensible a valores extremos.

- Varianza S^2 (‘Variance’): Mide el promedio de las desviaciones (al cuadrado) de las observaciones con respecto a la media.



$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

  - Es sensible a valores extremos (alejados de la media).
  - Sus unidades son el cuadrado de las de la variable.
  - Si habéis oído hablar en física de porqué un patinador gira a diferente velocidad cuando tiene los brazos recogidos (menor dispersión), puede que os suene el ‘coeficiente de inercia’

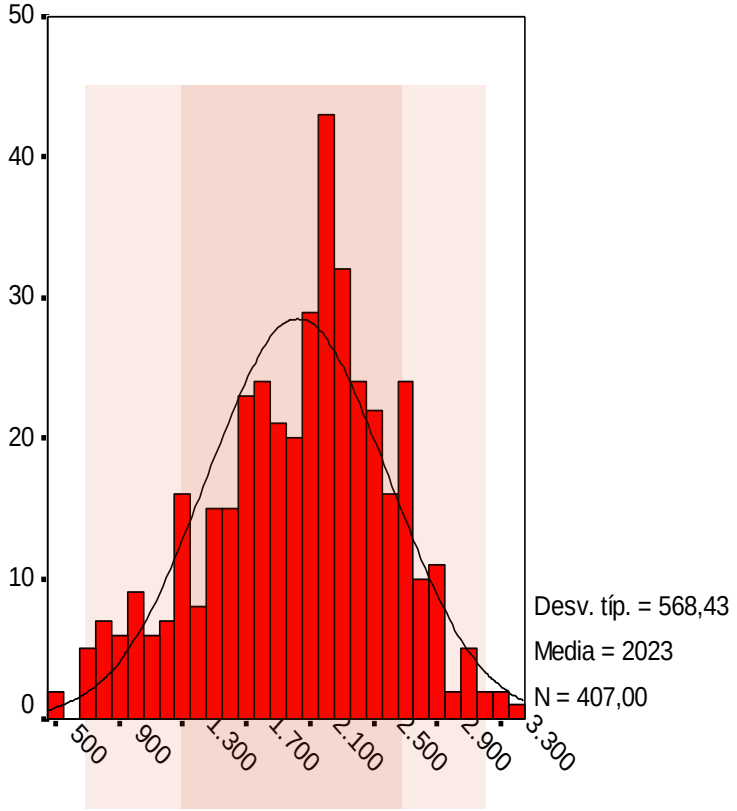


Desviación típica (‘standard deviation’)

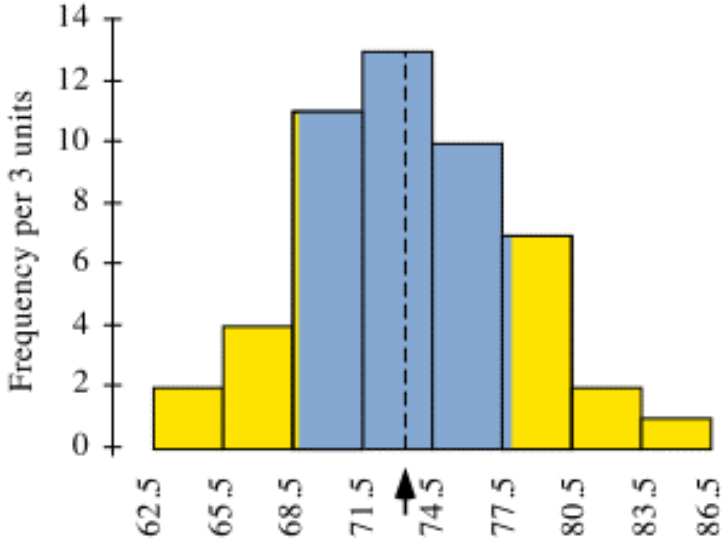
Es la raíz cuadrada de la varianza

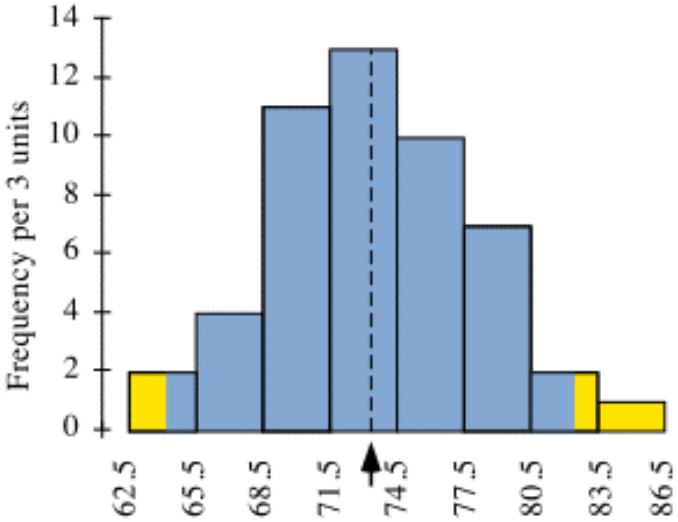
$$S = \sqrt{S^2}$$

- Tiene las misma dimensionalidad (unidades) que la variable.
- Cierta distribución que veremos más adelante (normal o gaussiana) quedará completamente determinada por la media y la desviación típica.
  - A una distancia de una desv. típica de la media tendremos 68% observaciones.
  - A una distancia de dos desv. típica de la media tendremos 95% observaciones.



Peso recién nacidos en partos gemelares





- Centrado en la media y a una desviación típica de distancia tenemos más de la mitad de las observaciones (izq.)
- A dos desviaciones típicas las tenemos a casi todas (dcha.)

Coeficiente de variación

$$CV = \frac{S}{\bar{x}}$$

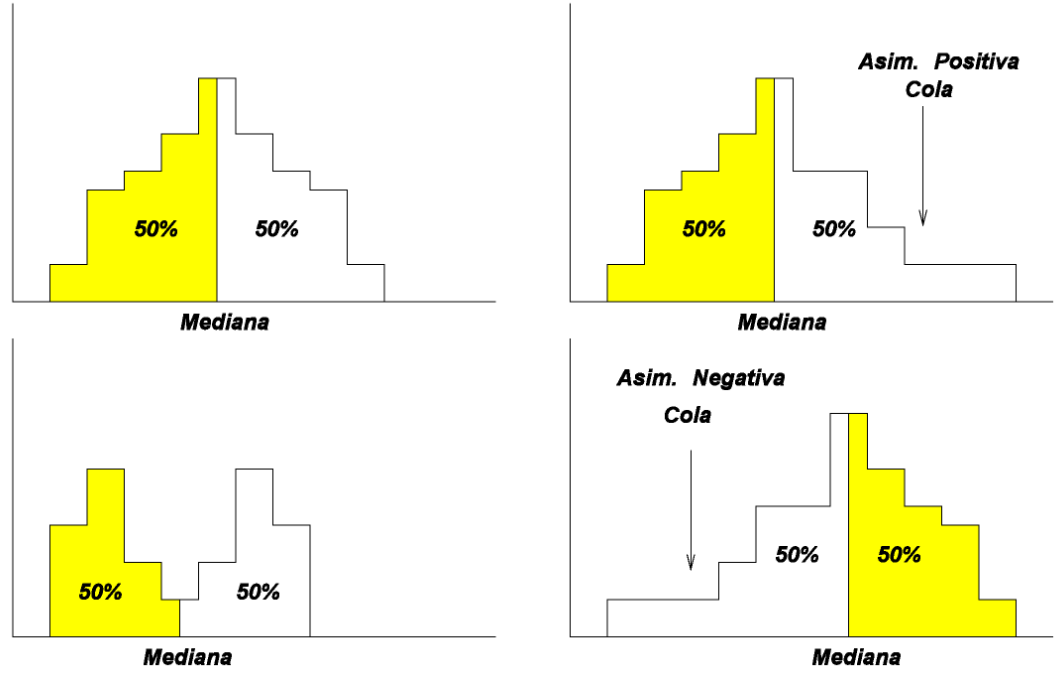
Es la razón entre la desviación típica y la media.

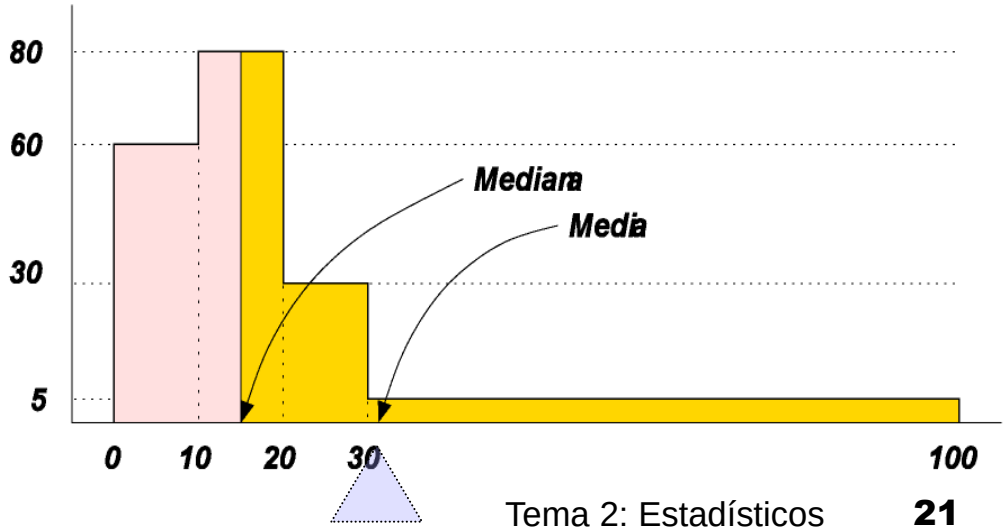
- Mide la desviación típica en forma de "qué tamaño tiene con respecto a la media"
- También se la denomina variabilidad relativa.
- Es frecuente mostrarla en porcentajes
  - Si la media es 80 y la desviación típica 20 entonces CV=20/80=0,25=25% (variabilidad relativa)

- Es una cantidad **adimensional**. Interesante para comparar la variabilidad de diferentes variables.
  - Si el peso tiene CV=30% y la altura tiene CV=10%, los individuos presentan más dispersión en peso que en altura.
- No debe usarse cuando la variable presenta valores negativos o donde el valor 0 sea una cantidad fijada arbitrariamente
  - Por ejemplo 0ºC ≠ 0ºF
- Los ingenieros electrónicos hablan de la razón 'señal/ruido' (su inverso).

Asimetría o Sesgo

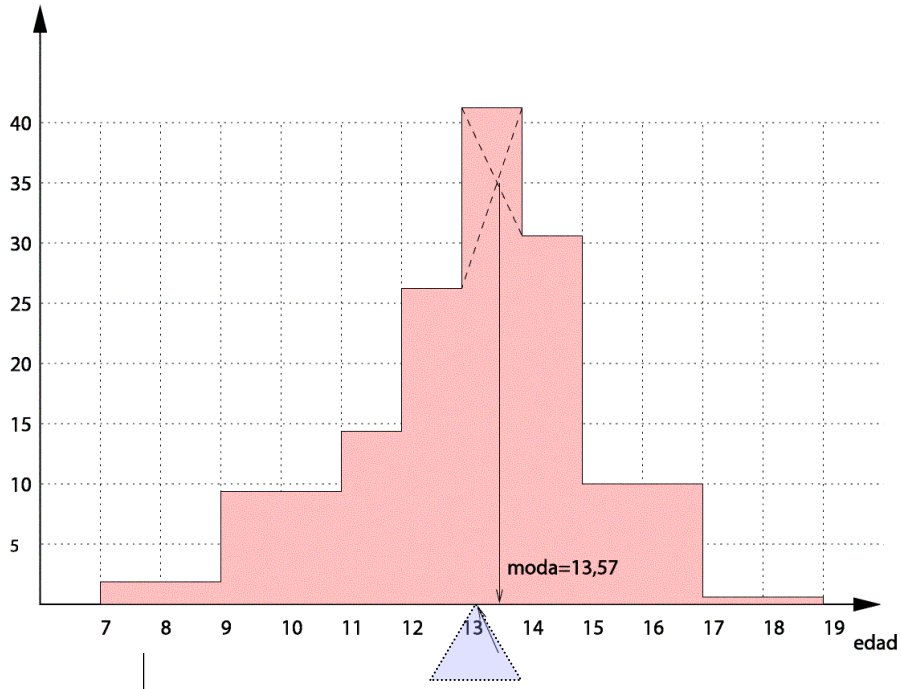
- Una distribución es simétrica si la mitad izquierda de su distribución es la imagen especular de su mitad derecha.
- En las distribuciones simétricas media y mediana coinciden. Si sólo hay una moda también coincide
- La asimetría es positiva o negativa en función de a qué lado se encuentra la cola de la distribución.
- La media tiende a desplazarse hacia las valores extremos (colas).
- Las discrepancias entre las medidas de centralización son indicación de asimetría.

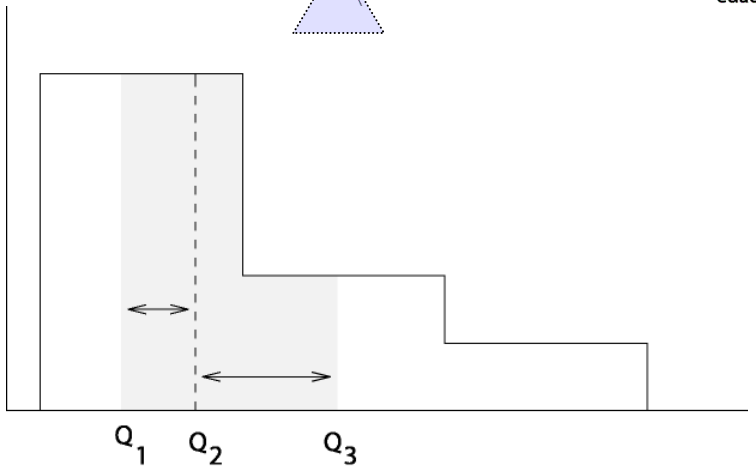




Estadísticos para detectar asimetría

- Hay diferentes estadísticos que sirven para detectar asimetría.
  - Basado en diferencia entre estadísticos de tendencia central.
  - Basado en la diferencia entre el 1º y 2º cuartiles y 2º y 3º.
  - Basados en *desviaciones con signo respecto a la media*.
    - En este se basa SPSS. No lo calcularemos manualmente en este curso.
- En función del signo del estadístico diremos que la asimetría es positiva o negativa.
- Distribución simétrica ➔ asimetría nula.
- La asimetría es adimensional.





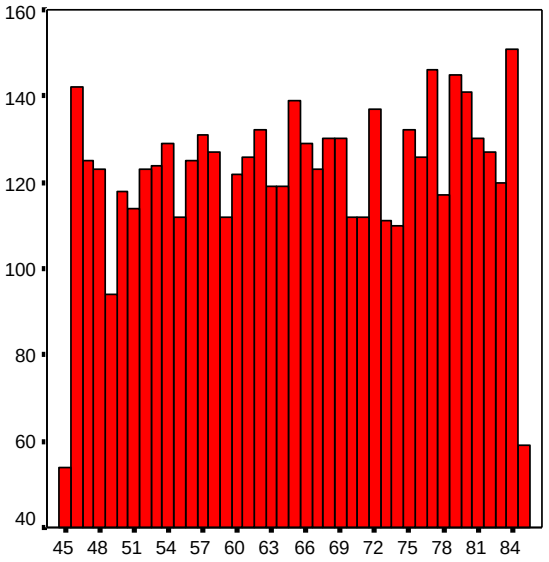
Apuntamiento o curtosis

La curtosis nos indica el grado de apuntamiento (aplastamiento) de una distribución con respecto a la distribución normal o gaussiana. Es adimensional.

Platicúrtica: curtosis < 0

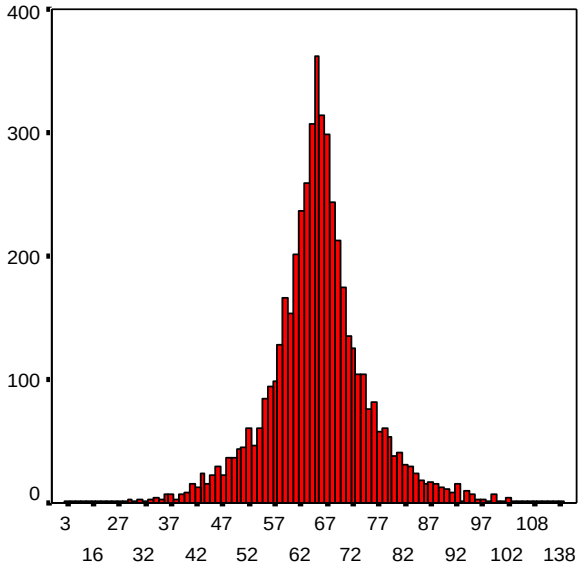
Mesocúrtica: curtosis = 0

Leptocúrtica: curtosis > 0

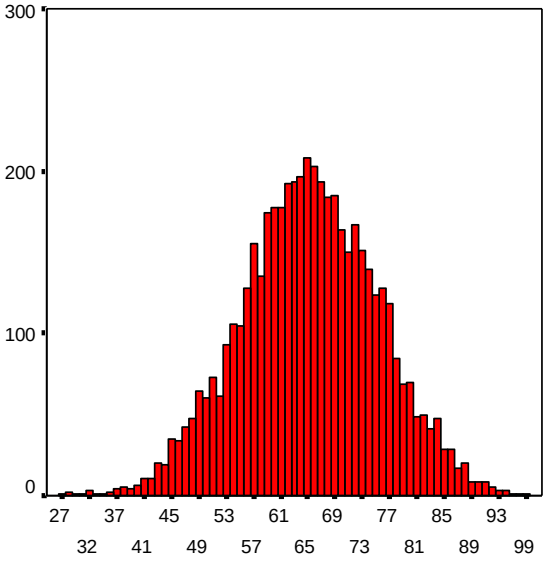


Platicúrtica

Los gráficos que veis poseen la misma media y desviación típica, pero con diferente grado de apuntamiento.
En el curso serán de especial interés las mesocúrticas y simétricas (parecidas a la normal).

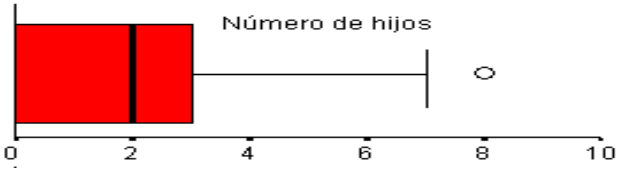


Leptocúrtica



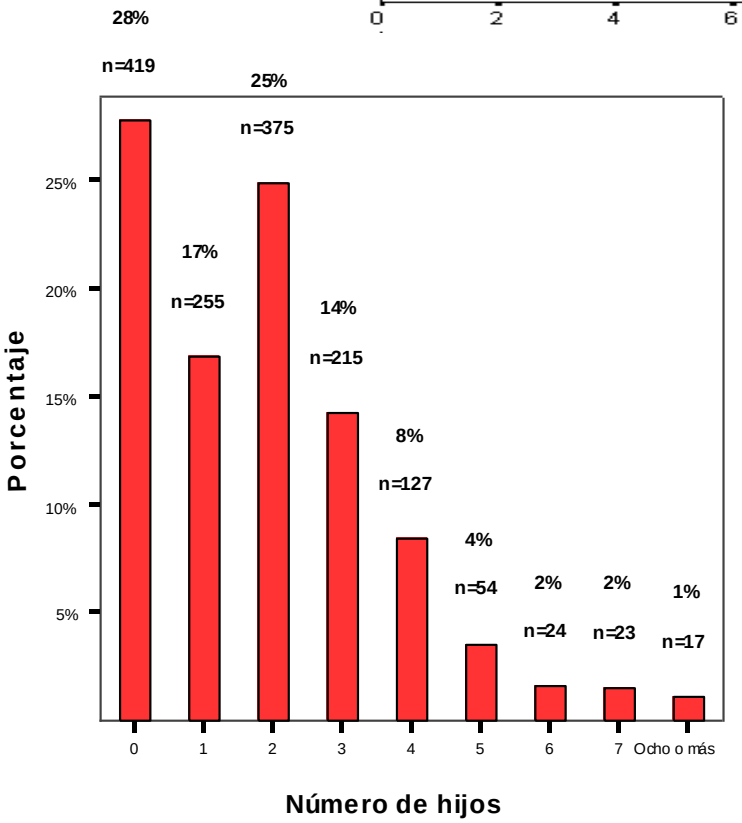
Mesocúrtica

Ejercicio: descriptiva con SPSS



Descriptivos para Número de hijos

		Estadístico	Error típ.
Media		1,90	,045
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	1,81	
	Límite superior	1,99	
Media recortada al 5%		1,75	
Mediana		2,00	
Varianza		3,114	
Desv. típ.		1,765	
Mínimo		0	
Máximo		8	
Rango		8	
Amplitud intercuartil		3,00	
Asimetría		1,034	,063
Curtosis		1,060	,126



- Está sombreado lo que sabemos interpretar hasta ahora. Verifica que comprendes todo. ¿Qué unidades tiene cada estadístico? ¿Variabilidad relativa?
- Calcula los estadísticos que puedas basándote sólo en el gráfico de barras.

¿Qué hemos visto?

- Parámetros
- Estadísticos y estimadores
- Clasificación
  - Posición (cuantiles, percentiles,...)
    - Diagramas de cajas
  - Medidas de centralización: Media, mediana y moda
    - Diferenciar sus propiedades.
  - Medidas de dispersión
    - con unidades: rango, rango intercuartílico, varianza, desv. típica
    - sin unidades: coeficiente de variación
      - ¿Qué usamos para comparar dispersión de dos poblaciones?
  - Asimetría
    - positiva
    - negativa
      - ¿Podemos observar asimetría sin mirar la gráfica?
      - ¿Cómo me gustan los datos?
  - Medidas de apuntamiento (curtosis)
    - ¿Cómo me gustan los datos?