UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE EDUCACION
LICENCIATURA EN MATEMATICAS
ANALISIS MULTIVARIADO

1. Sean los vectores $u = (2, -2, 3)$, $v = (1, -3, 4)$ y $w = (3, 6, -4)$. Evaluar las siguientes expresiones:

   (a) $\|u + v\|$

   (b) $\|u\| + \|v\|$

   (c) $\|-2u\| + 2\|u\|$

   (d) $\|3u - 5v + w\|$

   (e) $\frac{1}{\|w\|}w$

   (f) $\left\|\frac{1}{\|w\|}w\right\|$

2. Encontrar la proyección ortogonal de u sobre a.

   (a) $u = (6, 2)$ $\quad a = (3, -9)$

   (b) $u = (-1, -2)$ $\quad a = (-2, 3)$

   (c) $u = (3, 1, -7)$ $\quad a = (1, 0, 5)$

   (d) $u = (1, 0, 0)$ $\quad a = (4, 3, 8)$

3. Sean los vectores $u = (3, 4)$, $v = (5, -1)$ y $w = (7, 1)$. Evaluar las siguientes expresiones:

   a. $u \cdot (7v + w)$

   b. $\|u + v\|$

   c. $\|u\| + \|v\|$

   d. $(\|u\| v) \cdot w$

4. Calcular los valores de k que hacen que u y v sean ortogonales.

   (a) $u = (2, 1, 3)$, $\quad v = (1, 7, k)$

   (b) $u = (k, k, 1)$, $\quad v = (k, 5, 6)$

5. Determinar cuáles de las siguientes matrices son ortogonales y calcular la inversa de las que lo sean.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

6. Calcular la ecuación característica y los autovalores de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. Obtener la descomposición espectral de las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular sus autovalores, los de A^2 y los de A^{-1}.

(b) Calcular una base ortogonal que la diagonalice.

9. Dadas las matrices

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) ¿Son idempotentes?

(b) Calcular su determinante.

(c) ¿Son definidas positivas?

(d) ¿Son ortogonales?

10. Sea el vector $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)'$. Encontrar la expresión de la matriz de la forma cuadrática en los casos:

(a) $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$

(b) $5\overline{x}^2$

(c) $\sum_{i=1}^{5} (x_i - \overline{x})^2$

donde $\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i/5$. Aplicación al caso $\mathrm{x} = (5, 6, 5, 10, 9)'$.

11. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Escribir en forma desarrollada la forma cuadrática $Q = x'Ax$.

(b) Calcular la derivada de la forma cuadrática.

(c) Escribir en forma desarrollada la forma bilineal $Q = x'Ay$.

(d) ¿Es Q definida positiva?

12. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

calcular sus raíces características y sus vectores propios y reducirla a forma diagonal.