TALLER VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. Sea X la variable aleatoria '*nivel de colesterol, en mg/dl, de los varones de 40 años'.* Escribir los siguientes sucesos, con notación abreviada, en función de la variable aleatoria X:

   (a) El conjunto de varones de 40 años cuyo nivel de colesterol es inferior a 145 mg/dl.
   (b) El conjunto de varones de 40 años que tiene un nivel de colesterol de 250 mg/dl o superior.
   (c) El conjunto de varones de 40 años cuyo nivel de colesterol está comprendido entre 200 y 250 mg/dl.
   (d) El conjunto de varones de 40 años cuyo nivel de colesterol es superior a 155 mg/dl y que además tienen un nivel de colesterol superior a 240 mg/dl.
   (e) El conjunto de varones de 40 años cuyo nivel de colesterol es superior a 175 mg/dl pero no sobrepasa los 200 mg/dl.
   (f) El conjunto de varones de 40 años cuyo nivel de colesterol es inferior a 180 mg/dl y superior a 200 mg/dl.
   (g) El conjunto de varones de 40 años cuyo nivel de colesterol es inferior a 150 mg/dl o superior a 250 mg/dl.

2. Sea X una variable aleatoria discreta con $sop(X) = \{0,\ 7,\ 6,\ -3,\ -2,\ 1,\ 3,\ -7,\ 5\}$ y sea $F(x)$[1] su función de distribución. Escribir las siguientes probabilidades en términos de la función de distribución $F(x)$:

   (a) Probabilidad de que X tome valores menores o iguales que 0.
   (b) Probabilidad de que X tome el valor 5.
   (c) Probabilidad de que X tome valores menores que -3.
   (d) Probabilidad de que X tome valores comprendidos entre -2 y 1.
   (e) Probabilidad de que X tome valores menores o iguales que 2,5.
   (f) Probabilidad de que X tome valores menores que 2,5.
   (g) Probabilidad de que X tome valores mayores que 1.
   (h) Probabilidad de que X tome valores mayores o iguales que -2.
   (i) Probabilidad de que X tome los valores 0, 1 ó 3.
   (j) Probabilidad de que el módulo de X sea mayor o igual que 3

[1] Si X es una variable aleatoria, se define su función de distribución $F(x_o)$ como $F(x_o) = p\,[X \le x_o]$, $\forall\ x_o \in \mathbb{R}$, es decir, la función de distribución da la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores en el intervalo $(-\infty, x_o]$

(k) Probabilidad de que el módulo de *X* sea mayor que 3

3. La función de probabilidad de *V*, el número semanal de accidentes en una cierta intersección de calles, está dada por: $p[0] = 0{,}40$, $p[1] = 0{,}30$, $p[2] = 0{,}20$ y $p[3] = 0{,}10$.

   (a) Calcular la función de distribución de *V* y dibujar su gráfica.
   (b) Calcular la probabilidad de que haya al menos dos accidentes en una semana cualquiera utilizando la función de probabilidad.
   (c) Calcular la probabilidad de que haya al menos dos accidentes en una semana cualquiera utilizando la función de distribución.

4. Una organización de consumidores anota regularmente el número de defectos importantes que se encuentran en un automóvil nuevo. De sus estudios ha encontrado que la función de distribución de la variable aleatoria *X* anteriormente mencionada es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}06 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0{,}19 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0{,}39 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0{,}67 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0{,}92 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 0{,}97 & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \le x \end{cases}$$

   (a) Calcular $p[X = 2]$.
   (b) Calcular $p[X \ge 3]$.
   (c) Calcular $p[2 \le X \le 5]$.
   (d) Calcular $p[2 < X < 5]$
   (e) Obtener la esperanza, la varianza y la desviación típica de *X*.

5. Sea *X* la variable aleatoria que representa la suma de resultados al lanzar dos dados.

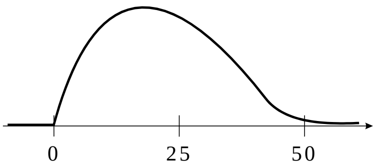
   (a) ¿Cuál es el soporte de la variable aleatoria *X*?
   (b) Obtener la función de probabilidad de la variable y su diagrama de barras.
   (c) Hallar la función de distribución de *X* y representarla gráficamente.
   (d) Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos al lanzar dos dados sea mayor que 4 y menor que 8.

(e) Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos al lanzar dos dados sea mayor o igual que 4 y menor o igual que 8.

(f) ¿Cuál es el valor esperado de la suma de los resultados al lanzar dos dados? ¿Y su desviación típica?

6. Una compañía de refrescos anuncia premio en las chapas asegurando que de cada 1000 chapas hay 400 con "*inténtalo de nuevo*", 300 con premio de 50 ptas, 250 con premio de 100 ptas, 40 con premio de 500 ptas y 10 con premio de 1000 ptas. Un individuo, al que no le gusta el refresco, decide comprar una botella cuyo coste es de 100 ptas. Caracterizar su ganancia mediante una variable aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo no pierda dinero con la compra?

7. Para determinadas bacterias se ha estudiado la variable X *tiempo de vida de una bacteria* (horas) resultando ser la función de densidad de dicha variable la que se muestra en la figura:



Sombrear la región bajo la curva de densidad que corresponde a cada una de las siguientes probabilidades:

(a) Probabilidad de que una bacteria viva menos de 30 horas.

(b) Probabilidad de que una bacteria viva entre 10 y 25 horas

8. La variable aleatoria X tiene función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } x \in (0,1) \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x \in (2,4) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ es una función de densidad y representarla gráficamente.

(b) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X y representarla gráficamente.

(c) Calcular $p[X < 0{,}6]$.

(d) Calcular $p[0{,}3 \leq X \leq 0{,}6]$.

(e) Calcular $p[0{,}6 < X < 3{,}4]$.

(f) Obtener el rango intercuartílico de la variable aleatoria X.

9. La variable aleatoria X tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ es una función de densidad y representarla gráficamente.
(b) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X y representarla gráficamente.
(c) Calcula el valor esperado y la varianza de X.
(d) Hallar los percentiles 30 y 70 de la distribución.

10. La cantidad real de café, en gramos, que hay en un frasco de 230 gramos es una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 227{,}5 \\ 1/5 & \text{si } 227{,}5 < x < 232{,}5 \\ 0 & \text{si } x \ge 232{,}5 \end{cases}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ es una función de densidad.
(b) Calcular la probabilidad de que un frasco de 230 gramos contenga como mucho 228,65 gramos de café.
(c) Calcular la probabilidad de que un frasco de 230 gramos contenga una cantidad real de café comprendida entre 229,34 y 231,66 gramos.
(d) Calcular la probabilidad de que un frasco de 230 gramos contenga al menos 229,85 gramos de café realmente.
(e) Calcular la cantidad real de café que se espera contenga un frasco y su desviación típica.

11. La longitud de cierta pieza que produce una fábrica es una cantidad aleatoria que se distribuye según la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (x-1) \cdot (3-x) & \text{si } x \in [1,3] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde x está medido en centímetros. Si una pieza sólo es válida para una determinada tarea si su longitud está comprendida entre 1,7 y 2,4 cm, ¿qué porcentaje de piezas válidas se produce?

12. El número de minutos que un vuelo de Phoenix a Tucson se adelanta o atrasa es una

variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{288}(36 - x^2) & \text{si } -6 < x < 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde los valores negativos son indicativos de que un vuelo llega adelantado y los valores positivos son indicativos de que llega con retraso. Encontrar la probabilidad de que uno de estos vuelos llegue:

(a) al menos 2 minutos adelantado.
(b) al menos un minuto retrasado.
(c) entre 1 y 3 minutos adelantado.
(d) exactamente retrasado en 5 minutos.

13. La proporción de cierto aditivo en la gasolina determina su peso específico lo que, a su vez, determina el precio del combustible. Supongamos que en la producción de gasolina, el porcentaje de aditivo es una variable aleatoria *X* con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 6 \cdot x \cdot (1 - x) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si el porcentaje de aditivo es menor de 0,5% tendremos gasolina de tipo 1 a 0,80 euros el litro; si el porcentaje de aditivo está comprendido entre 0,5% y 0,8% tendremos gasolina de tipo 2 que se vende a 0,90 euros el litro y si el porcentaje de aditivo se encuentra entre 0,8% y 1% tendremos gasolina de tipo 3 que cuesta a 1 euro por litro.

(a) Representar gráficamente la función de densidad de *X*.

(b) Obtener la función de distribución de *X* y representarla gráficamente.

(c) Calcular los porcentajes de producción de cada tipo de gasolina.

(d) Calcular el precio medio por litro de gasolina.

14. La duración, en horas, de un alimento perecedero es una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{180000}{(x + 100)^3} & \text{para } x \ge 200 \\ 0 & \text{para } x < 200 \end{cases}$$

Encontrar la probabilidad de que el alimento:

(a) se estropee antes de que transcurran 400 horas.
(b) dure al menos 500 horas.

(c) dure 12 días.

(d) Obtener la mediana de la distribución.

15. El tiempo de vida total, en años, de los perros de una cierta raza que ya han cumplido 5 años, es una variable aleatoria cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 5 \\ 1 - \dfrac{25}{x^2} & \text{para } x > 5 \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que un perro de esa raza que ya ha cumplido 5 años de edad:

(a) viva en total más de 10 años.

(b) viva al menos otros 10 años más.

(c) viva entre 12 y 15 años.

(d) cumpla 15 años sabiendo que a los 10 años estaba vivo.

16. La eficacia de las calefacciones que funcionan mediante energía solar depende de la cantidad de radiación de sol. Para un mes de octubre típico, la radiación total diaria en Miami, Florida, es una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por (las unidades son cientos de kilocalorías)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{32}(x-2)(6-x) & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcular la probabilidad de que la radiación solar sea mayor que 300 kilocalorías en un día normal de octubre.

(b) Según este modelo, ¿qué cantidad de radiación solar queda rebasada exactamente el 50% de los días de octubre?

17. El pH, con el que se mide la acidez del agua, es importante en los estudios sobre lluvia ácida. Para determinado lago se llevan a cabo mediciones testigo de la acidez para que se pueda notar cualquier cambio en la acidez del agua originado por la lluvia ácida. El pH del agua del lago es un variable aleatoria X que, según se ha podido comprobar a partir de las muestras tomadas, tiene una función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}(7-x)^2 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ es una función de densidad.

(b) Dibujar la curva $f(x)$.

(c) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X.

(d) Calcular la probabilidad de que el pH sea menor que 6 en una muestra del agua de este lago.

(e) Calcular la probabilidad de que el pH de una muestra del agua de este lago esté comprendido entre 5,5 y 6,2.

(f) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

(g) Calcular la mediana, los cuartiles y el rango intercuartílico de la variable X.

(h) ¿Es de esperar con mucha frecuencia valores del pH menores que 5,5?

18. Al examinar los pozos de agua en un zona con respecto a tres impurezas encontradas frecuentemente en el agua potable, resultó que el 20% de los pozos no revelaba impureza alguna, el 40% tenía la impureza *A*, en el 60% se encontró la impureza *B* y en el 30% la impureza *C*. Además, de los pozos en los que se encontró la impureza *A*, se vio que el 60% también contenía la impureza *B* y que un 30% contenía la impureza *C*. Del mismo modo, en un 40% de los pozos que tenían impureza *B* también se encontró la impureza *C*. Encontrar la distribución de la variable '*número de tipos distintos de impurezas encontradas en un pozo de agua*'.

19. En una población, la cantidad de plomo que tiene una persona en la sangre, medida en p.p.m., es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{500} & \text{si } 0 \le x < 20 \\ \dfrac{50-x}{750} & \text{si } 20 \le x < 50 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Representar $f(x)$ gráficamente.

(b) Demostrar que $f(x)$ es una función de densidad.

(c) De entre las personas de la comunidad cuyo contenido de plomo en la sangre es superior a 15 p.p.m., ¿Qué porcentaje tiene en la sangre una cantidad de plomo superior a 40 p.p.m.?

(d) Calcular la cantidad media de plomo en la sangre de los individuos de la población

(e) Elegimos una persona al azar. Obtener la probabilidad de que la cantidad de plomo en su sangre sea inferior a 25 p.p.m.

(f) Obtener la probabilidad de que en 40 personas elegidas al azar, haya entre 15 y 20 personas con una cantidad de plomo en la sangre inferior a 25 p.p.m.

20. Para una determinada sección de un bosque de pinos, el número de árboles enfermos por hectárea se puede suponer que tiene una distribución cuyo promedio es de 10 árboles enfermos por hectárea. Los árboles con plaga se fumigan con un insecticida a un coste de \$3 por árbol, además de un coste fijo de administración por renta de equipo igual a \$50. Calcular el valor esperado y la desviación estándar del costo total *C* de la desinfección de una hectárea de bosque. ¿Dentro de qué intervalo se puede esperar que quede *C* con una probabilidad de por lo menos 0,75?