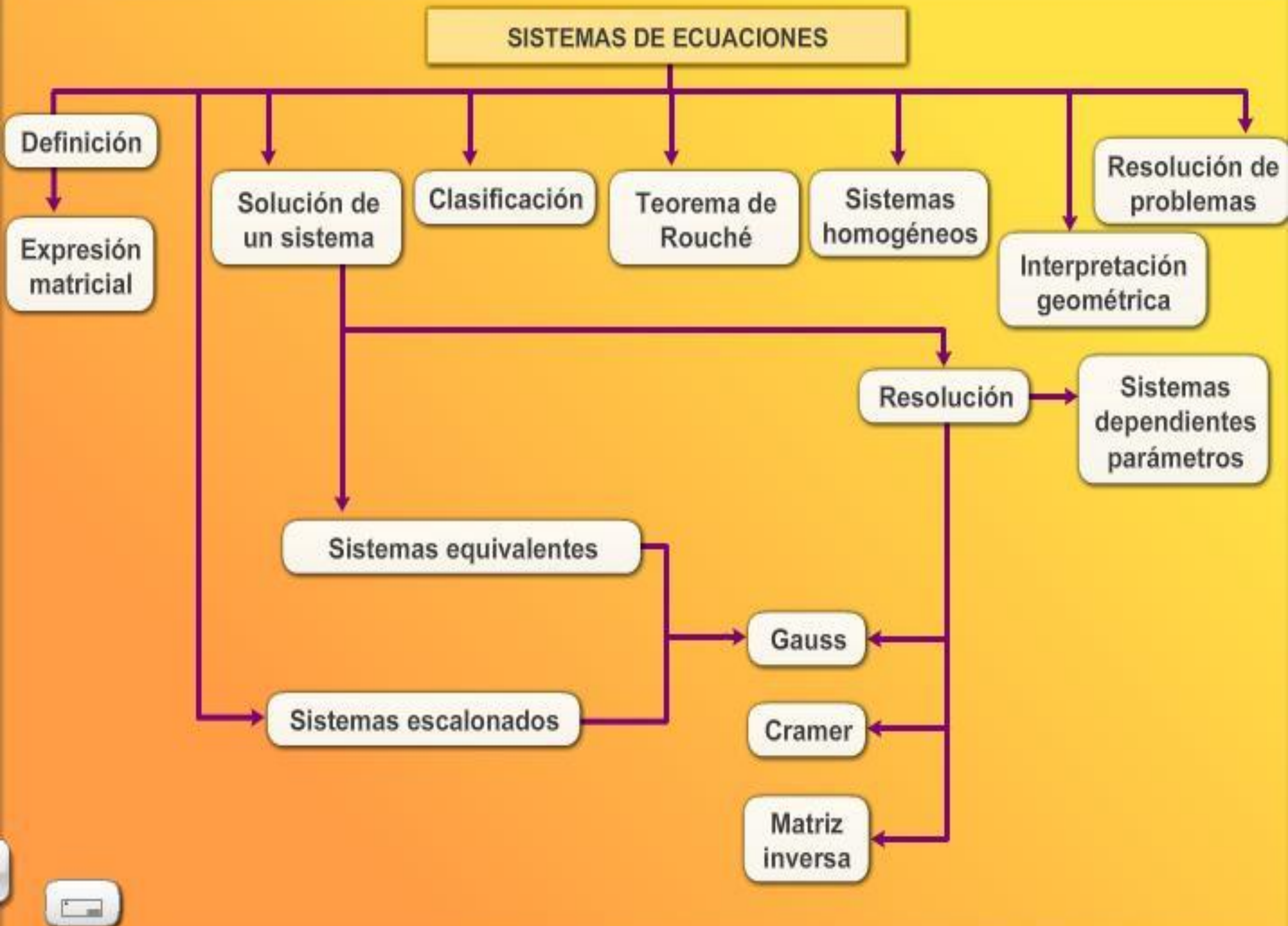
# Sistemas de Ecuaciones Lineales

DAGOBERTO SALGADO HORTA



SISTEMAS DE ECUACIONES
Definición
Expresión matricial
Solución de un sistema
Clasificación
Teorema de Rouché
Sistemas homogéneos
Interpretación geométrica
Resolución de problemas
Resolución
Sistemas dependientes parámetros
Sistemas equivalentes
Sistemas escalonados
Gauss
Cramer
Matriz inversa

# Definición

Un **sistema de m ecuaciones con *n* incógnitas** es un conjunto de ecuaciones como:

m ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \boxed{a_{1n}}x_n = \boxed{b_1} \\ \boxed{a_{21}}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = \boxed{b_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = \boxed{b_m} \end{cases}$$

n incógnitas

términos independientes

incógnitas

Coeficientes del sistema

# Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema $\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$ puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A: matriz de los coeficientes

X: matriz de las incognitas

B: matriz de los términos independientes

**Expresión matricial del sistema**

**AX=B**

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} & b_3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

**Matriz ampliada**

## Expresión matricial: ejemplo

El sistema $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ x - 4y + z = -2 \end{cases}$

Tiene la siguiente **matriz de los coeficientes**: **A =** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Tiene la siguiente **matriz ampliada**: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Tiene la siguiente **expresión matricial:** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

# Solución de un sistema de ecuaciones

**Una solución del sistema:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

**es un conjunto ordenado de números reales ($s_1$, $s_2$, $s_3$, ... , $s_n$) tales que se verifican todas las ecuaciones:**

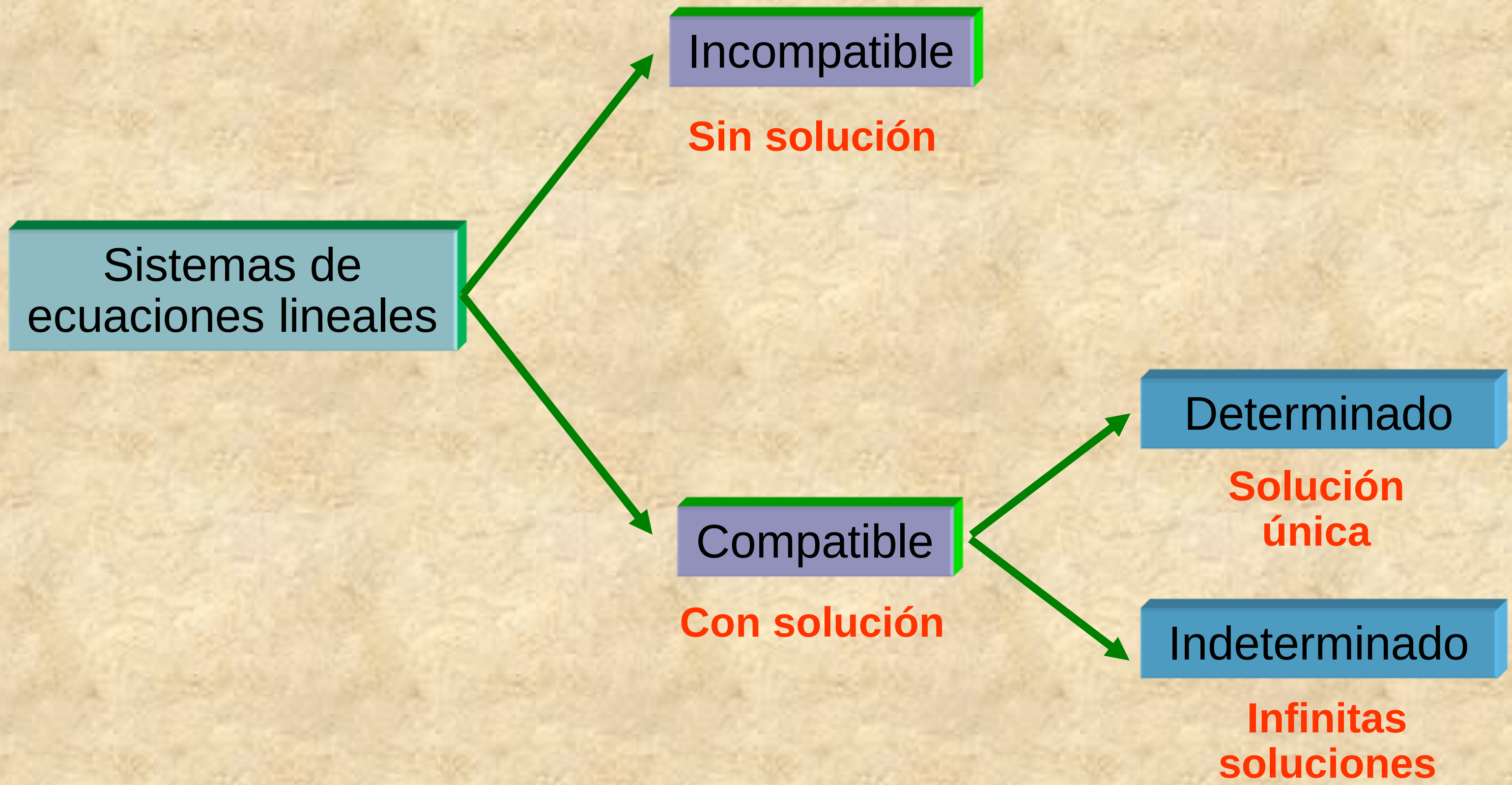
$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + a_{m3}s_3 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$$

# Solución de un sistema de ecuaciones: ejemplo

**Consideramos el sistema**: $\begin{cases} \quad x + y - z = 1 \\ x \quad + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y \qquad = 3 \end{cases}$

- Los valores $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ son una solución del sistema por que: $\begin{cases} 3 + (-1) - 1 = 1 \\ 3 \quad + 2 \cdot (-1) + (-1) = 2 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \qquad = 3 \end{cases}$
- Los valores $\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$ son una solución del sistema por que: $\begin{cases} -3 + 3 - (-1) = 1 \\ -3 + 2 \cdot 3 + (-1) = 2 \\ 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (3) \qquad = 3 \end{cases}$

## Clasificación de un sistema según el número de soluciones




- **Discutir un sistema** es decidir a cuál de estas tres categorías pertenece.

# Sistemas equivalentes

**Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.**

**Transformaciones** que convierten un sistema en otro equivalente:

**I.** Multiplicar o dividir ambos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

**II.** Sumar a una ecuación del sistema otra ecuación del mismo.

**III.** Eliminar una ecuación que es combinación lineal de otras dos.

## Sistemas equivalentes: ejemplo

$$\begin{cases} 2x+y-2z=3 \\ 3x+y-z=1 \\ 2x+2y-4z=4 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to \frac{1}{2}E_3} \begin{cases} 2x+y-2z=3 \\ 3x+y-z=1 \\ x+y-2z=2 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_1} \begin{cases} x+y-2z=2 \\ 3x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[E_3 \to E_3 - 2E_1]{E_2 \to E_2 - 3E_1} \begin{cases} x+y-2z=2 \\ -2y+5z=-5 \\ -y+2z=-1 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to 2E_3 - E_2} \begin{cases} x+y-2z=2 \\ -2y+5z=-5 \\ -z=3 \end{cases}$$

Sistemas equivalentes

# Sistemas de ecuaciones escalonados

**Un sistema de ecuaciones es escalonado cuando verifica que, reordenadas sus ecuaciones de forma conveniente, la matriz de los coeficientes es escalonada.**

Ejemplos:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ \quad -3y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+2y-3z=5 \\ \quad 4y+2z=3 \\ \quad 3z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=4 \\ \quad 3y+2z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3z=4 \\ \quad z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

**Definición 2** *Se dice que una matriz es escalonada si el número de ceros que precede al primer elemento diferente de cero en cada fila, aumenta fila por fila, hasta tener posiblemente filas de sólo ceros.*

**Ejemplo:** *Las siguientes matrices son escalonadas:*

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & -8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & -6 & 3 \\ 0 & -9 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -6 & -8 & 2 & 9 & -8 \\ 0 & 9 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 3** *Una matriz se llama escalonada reducida, si:*

i) Es escalonada.

ii) El primer elemento de cada fila no nula es 1 y éste es el único elemento diferente de cero que se encuentra en la respectiva columna.

**Ejemplo:** *Las siguientes matrices son escalonadas reducidas.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Resolución de sistemas de ecuaciones

**Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones o decidir que no tiene ninguna.**

Métodos de resolución:

**1.** Método de Gauss.

**2.** Método de Cramer.

**3.** Método de la matriz inversa.

## Método de eliminación de Gauss

Para resolver un sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas, se procede de la siguiente manera:

i) Se forma la matriz ampliada $\mathbf{B} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, donde **A** es la matriz de los coeficientes y **b** indica la matriz de los términos libres.

ii) Al aplicar operaciones elementales entre filas, la matriz **B** se lleva a una matriz equivalente **C,** donde **C** es escalonada reducida.

iii) Como la matriz **B** es equivalente **C,** entonces el sistema de ecuaciones que representa la matriz **B**, es equivalente al sistema de ecuaciones que representa la matriz **C**, y en esa matriz es fácil hallar las soluciones.

# Resolución de un sistema escalonado: ejemplo

Los sistemas escalonados son fácilmente resolubles:

$$\begin{cases} \boxed{x + y - 2z = 9} \\ \boxed{-3y + 8z = -14} \\ \boxed{2z = -5} \end{cases}$$

$$\boxed{z = -\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{y = \frac{-14 + 20}{-3} = -2}$$

$$\boxed{x = 9 - 5 + 2 = 6}$$

# Resolución de sistemas: método de Gauss

El **método de Gauss** para resolver un sistema de ecuaciones lineales **consiste en obtener** de un sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

**un sistema equivalente y escalonado**, mediante transformaciones adecuadas.

Se pueden dar los siguientes pasos:

**I.** Si es necesario reordenar ecuaciones para que $a_{11}$ sea distinto de cero.

**II.** Dividir la primera ecuación por $a_{11}$ y restar a cada ecuación un múltiplo de la primera para eliminar todos los elementos que quedan por debajo de $a_{11}x_1$.

**III.** Repetir los pasos anteriores basados ahora en $a_{22}$ (y si es necesario en cada $a_{ii}$).

**IV.** El proceso termina cuando no quedan más ecuaciones.

Al resolver un sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas, hemos visto que su solución puede hallarse fácilmente llevando la matriz ampliada a una escalonada reducida; estudiemos un poco cómo puede ser esta matriz.

i) Si tiene la forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema tiene solución única

ii) Si tiene la forma:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-r} & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-r} & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,1} & c_{r,2} & \cdots & c_{r,n-r} & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

el sistema no tiene solución debido a que la última ecuación conduce a

$$0 = 1$$

iii) Si la matriz escalonada tiene forma:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,1} & c_{r,2} & \cdots & c_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

el sistema que representa es:

$$\begin{array}{llllllllllll}
x_1 & & & + & c_{1,1}x_{r+1} & + & c_{1,2}x_{r+2} & + \cdots + & c_{1,n-r}x_n & = & d_1 \\
& x_2 & & + & c_{2,1}x_{r+1} & + & c_{2,2}x_{r+2} & + \cdots + & c_{2,n-r}x_n & = & d_2 \\
& & x_3 & + & c_{3,1}x_{r+1} & + & c_{3,2}x_{r+2} & + \cdots + & c_{3,n-r}x_n & = & d_3 \\
& & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
& & x_r & + & c_{r,1}x_{r+1} & + & c_{r,2}x_{r+2} & + \cdots + & c_{r,n-r}x_n & = & d_r
\end{array}$$

Las variables $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$, que no aparecen al comienzo de ecuación, se llaman **variables libres,** además:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & d_1 & - & c_{1,1}x_{r+1} & - & c_{1,2}x_{r+2} & - & \cdots & - & c_{1,n-r}x_n \\
x_2 & = & d_2 & - & c_{2,1}x_{r+1} & - & c_{2,2}x_{r+2} & - & \cdots & - & c_{2,n-r}x_n \\
x_3 & = & d_3 & - & c_{3,1}x_{r+1} & - & c_{3,2}x_{r+2} & - & \cdots & - & c_{3,n-r}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
x_r & = & d_r & - & c_{r,1}x_{r+1} & - & c_{r,2}x_{r+2} & - & \cdots & - & c_{r,n-r}x_n
\end{array}
$$

Hay $n - r$ incógnitas después del signo =, a saber $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$.

Luego si damos a estas $n - r$ incógnitas valores arbitrarios $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{n-r}$ respectivamente tenemos una solución del sistema

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & d_1 & + & c_{1,1}\alpha_1 & + & c_{1,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{1,n-r}\alpha_{n-r} \\
x_2 & = & d_2 & + & c_{2,1}\alpha_1 & + & c_{2,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{2,n-r}\alpha_{n-r} \\
x_3 & = & d_3 & + & c_{3,1}\alpha_1 & + & c_{3,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{3,n-r}\alpha_{n-r} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
x_r & = & d_r & + & c_{r,1}\alpha_1 & + & c_{r,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{r,n-r}\alpha_{n-r}
\end{array}
$$

la cual se puede escribir como:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & + & c_{1,1}\alpha_1 & + & c_{1,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{1,n-r}\alpha_{n-r} \\ d_2 & + & c_{2,1}\alpha_1 & + & c_{2,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{2,n-r}\alpha_{n-r} \\ d_3 & + & c_{3,1}\alpha_1 & + & c_{3,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{3,n-r}\alpha_{n-r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_r & + & c_{r,1}\alpha_1 & + & c_{r,2}\alpha_2 & + & \cdots & + & c_{r,n-r}\alpha_{n-r} \\ & & -\alpha_1 & & & & & & \\ & & & & -\alpha_2 & & & & \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & -\alpha_{n-r} \end{pmatrix}$$

Como los $\alpha_i$ son arbitrarios, el sistema tiene infinitas soluciones y **X** representa todas las soluciones.

## Método de Gauss: posibilidades

En el método de Gauss, una vez obtenida la matriz se pueden dar las siguientes posibilidades:

- Si alguna de las filas está formada por todos ceros menos el término independiente.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ \quad 3y+8z=14 \\ \qquad 0=5 \end{cases}$$

**Incompatible**

- Si no es incompatible, se considera el número de filas e incógnitas que quedan:

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ \quad 3y+8z=14 \\ \qquad 2z=5 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x+y+2z=9 \\ 3y+8z=14 \end{matrix} \qquad 3x+y-2z=1$$

**nº de ecuaciones = nº de incógnitas** — **compatible determinado**

**nº de ecuaciones < nº de incógnitas** — **compatible indeterminado**

# Método de Gauss: sistema compatible determinado

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +y-2z=9 \\ \quad -3y+8z=-14 \\ \quad -3y+10z=-19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +y-2z=9 \\ \quad -3y+8z=-14 \\ \qquad 2z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(1ª ec) (–2) + 2ª ec
(1ª ec) (–2) + 3ª ec

(2ª ec) (–1) + 3ª ec

Se despejan incógnitas hacia arriba $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 9+2-5=6 \\ y &= \frac{20-14}{-3}=-2 \\ z &= \frac{-5}{2} \end{aligned}}$$

## Método de Gauss: sistema incompatible

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 4z = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ -3y + 8z = -19 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

(2ª ec) (–1) + 3ª ec

(1ª ec) (–2) + 2ª ec
(1ª ec) (–2) + 3ª ec

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 0z = -5 \end{cases}$$

La última ecuación no tiene solución y por lo tanto el sistema es incompatible.

## Método de Gauss: sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 4x - 2y + 8z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(1ª ec) (–2) + 2ª ec
(1ª ec) (–2) + 3ª ec

Se despejan incógnitas hacia arriba, después de hacer $z = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 2t - \dfrac{-8t - 14}{-3} \\ y = \dfrac{-8t - 14}{-3} \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{3} - \dfrac{2}{3}t \\ y = \dfrac{14}{3} + \dfrac{8}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

# Regla de Cramer: sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

El sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ al ser resuelto por reducción se llega a:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Esta solución puede ser expresada de la siguiente forma: $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

Se observa que:

- El denominador de las soluciones es el determinante de la matriz de los coeficientes.
- Cada numerador es el determinante de la matriz obtenida al sustituir la correspondiente columna de coeficientes por la los de términos independientes.

# Regla de Cramer: sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Si $|A| \neq 0$, el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas $A \cdot x = B$ tiene solución única dada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Esta regla es válida para cualquier sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas y se llama **regla de Cramer**.

# Regla de Cramer (demostración)

Sea **S un sistema de Cramer** (por definición es sistema compatible determinado). La solución se obtiene como un cociente entre el determinante de la incógnita correspondiente (el que se obtiene sustituyendo la columna de dicha incógnita por los términos independientes) y el determinante de la matriz de coeficientes.

$$s_i = \frac{\det(C_1, C_2, \ldots B, \ldots C_n)}{\det(C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots C_n)} \quad 1 \le i \le n$$

D./ Como el sistema es compatible, $\exists$ $(s_1, s_2, \ldots. s_n)$ que es solución del sistema, es decir

$$B = s_1C_1 + s_2C_2 + \ldots. + s_nC_n$$

$\det(C_1, C_2, \ldots.. B, \ldots. C_n) = \det(C_1, C_2, \ldots\ldots.., s_1C_1 + s_2C_2 + \ldots. + s_nC_n, \ldots\ldots\ldots C_n) =$

$\det(C_1, C_2, \ldots.., s_1C_1 \ldots. C_n) + \det(C_1, C_2, \ldots, s_2C_2, \ldots. C_n) + \ldots\ldots + \det(C_1, C_2, \ldots.., s_nC_n, \ldots. C_n)$

**Todos los determinantes, excepto el que tiene todas las columnas distintas son cero por tener dos columnas proporcionales. Luego**

$= \det(C_1, C_2, \ldots.., \mathbf{s_i} C_{i,}, \ldots. C_n) = \mathbf{s_i} \det(C_1, C_2, \ldots.., Ci, \ldots. C_n)$ y despejando $\mathbf{s_i}$ se obtiene lo que queríamos.

# Resolución de sistemas: método de la matriz inversa

El sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ tiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Si $|A| \neq 0$ la matriz A es inversible.
Multiplicamos por la izquierda a ambos miembros por $A^{-1}$.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Y esta última igualdad nos resuelve el sistema.

# Compatibilidad de sistemas. Teorema de Rouché

Dado el sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

siendo *A* y *A** la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

**Enunciado: Un sistema de m ecuaciones con n incognitas, es compatible si y sólo si, los rangos de las dos matrices son iguales**.

**rg(*A*) = rg (*A**)**

# Teorema de Rouché: demostración

- Escribimos el sistema en forma vectorial (con las columnas)

$$C_1x_1+ C_2x_2+.........+C_nx_n= B \qquad [\text{Sistema S}]$$

**Demostración**

**Cond. necesaria)** Si S es compatible, existe al menos una solución $(s_1,s_2,s_3,....s_n)$tal que

$$C_1s_1+ C_2s_2+.........+C_ns_n= B$$

Por tanto B es combinación lineal de las columnas $C_1,C_2,....C_n$ y el rango de la matriz ampliada con esa columna B no varía. Luego **rg(A) = rg($A^*$)**

**Cond. suficiente)** Si rg (A ) = rg ($A^+$) una fila o columna es combinación lineal de las demás. Sólo puede ser B porque el resto son iguales que las de A, luego:

$$C_1s_1+ C_2s_2+.........+C_ns_n= B$$

Lo que quiere decir que los coeficientes $(s_1,s_2,s_3,....s_n)$ son una solución del sistema por lo que el sistema es compatible.

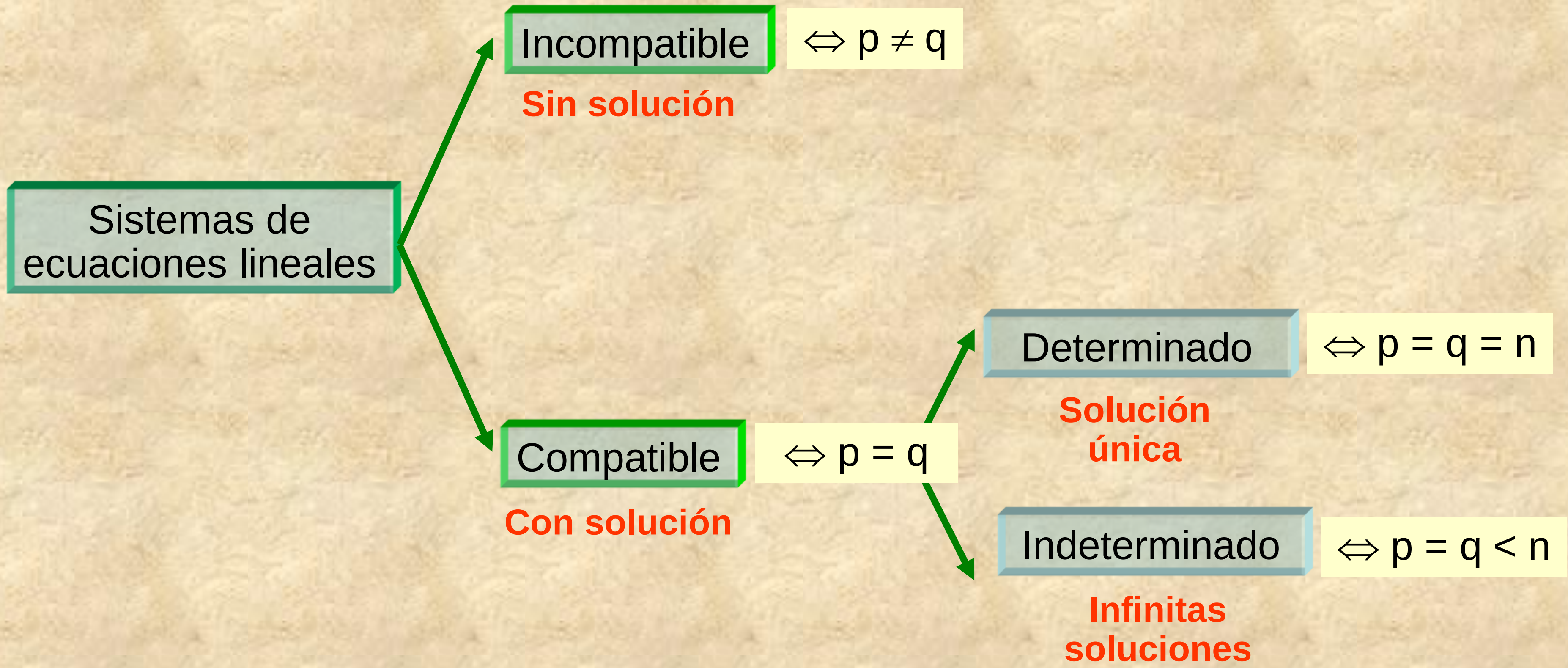
**Consecuencias:** El rango indica el nº de ecuaciones linealmente independientes.

SI el nº de incógnitas es mayor que el rango, el sistema tiene infinitas soluciones. Para resolverlo se eligen r ecuaciones independientes y se pasan al segundo miembro las n – r últimas incógnitas, obteniéndose un sistema de r ecuaciones y r incógnitas que ya se puede resolver y que dependerá de n-r parámetros (grados de libertad)

# Discusión de un sistema mediante el Teorema de Rouché

Sea un sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas.

- Sea A la matriz de los coeficientes y sea $p$ su rango.
- Sea $A^*$ la matriz ampliada y sea $q$ su rango.



# Discusión y resolución de un sistema dependiente de un parámetro

- En ocasiones, alguno de los coeficientes o términos independientes pueden tomar cualquier valor: es **un parámetro** de sistema de forma que al darle valores obtenemos sistemas de ecuaciones diferentes.

- **Discutir el sistema** según los valores de dicho parámetro es averiguar según sus valores cuándo el sistema es compatible o incompatible, y en caso de compatibilidad si es determinado o indeterminado.

Los siguientes pasos pueden ser útiles para discutir un sistema:

Hallar los valores del parámetro que anulan al determinante de la matriz de los coeficientes

Para dichos valores estudiar la naturaleza del sistema

Para los valores que hacen que el determinante de la matriz de los coeficientes no sea nulo, estudiar la naturaleza del sistema

## Sistema dependiente de parámetro: ejemplo

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + my + 3z = 2 \\ x - y - 2z = 3 \\ mx + y + z = 5 \end{cases}$$

Las **matriz de coeficientes y la matriz ampliada** asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ m & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1 + 3 - 2m^2 + 3m + 2 - m = -2m^2 + 2m + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1 \;\; m = 2$$

..... continuación .....

# Sistema dependiente de parámetro (continuación) : ejemplo

**CASO I.** Cuando $m = -1$: Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

rg($A$) = 2
rg($A$*) = 3

**El sistema es incompatible**

**CASO II.** Cuando $m = 2$:Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

rg($A$) = 2 =rg($A$*)

**Compatible indeterminado**

$$z = t, \begin{cases} x + 2y = 2 - 3t \\ x - y = 3 + 2t \end{cases} \Longrightarrow \; y = -\frac{1+5t}{3}, \quad x = \frac{8+t}{3}$$

**CASO III.** Cuando $m \neq -1, 2$
rg($A$) = rg($A$*) = 3 = número de incógnitas

**Compatible determinado**

Su única solución se puede obtener mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-13m + 26}{-2m^2 + 2m + 4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ m & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-13m + 26}{-2m^2 + 2m + 4} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ m & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3m^2 - 3m - 6}{-2m^2 + 2m + 4} = -\frac{3}{2}$$

# Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

**Compatibles**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

es siempre solución del sistema

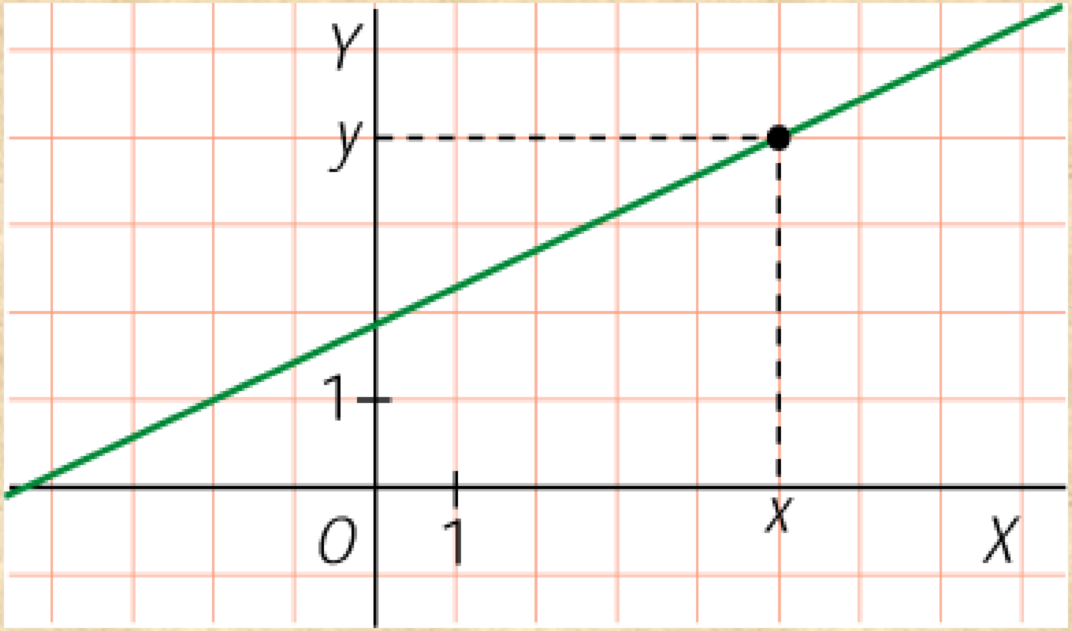
Los **sistemas homogéneos** pueden tener, pues, una o infinitas soluciones:

Si el determinante de la matriz de los coeficientes es **no nulo**,el sistema es compatible determinado y tiene como única solución la solución trivial.

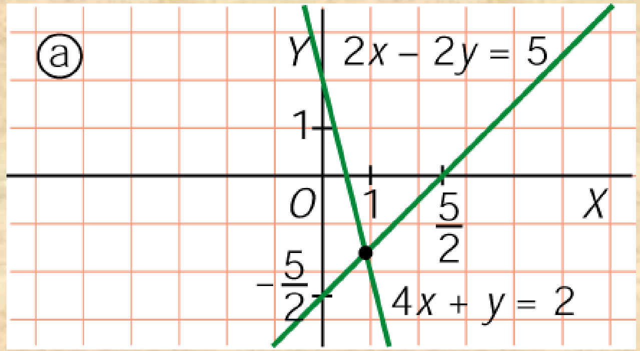
Si el determinante de la matriz de los coeficientes es **nulo**, el sistema es compatible indeterminado. Entre sus infinitas soluciones se encuentra la solución trivial.

# Interpretación geométrica de una ecuación lineal con dos incógnitas

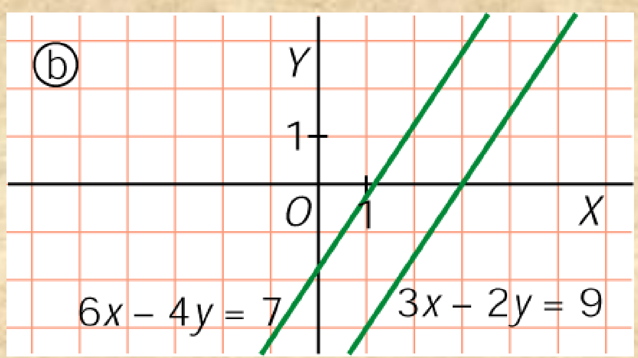
Los puntos (x, y) que verifican la ecuación lineal **$a_1x + a_2y = b$** forman una recta; se dice que $a_1x + a_2y = b$ es la **ecuación de una recta en el plano.**



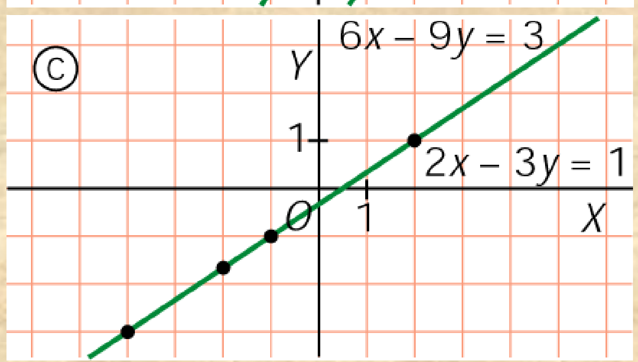
# Interpretación geométrica de un sistema con dos incógnitas




Las dos rectas sólo tienen un punto en común: el sistema es compatible determinado.




Las dos rectas no tienen puntos en común: el sistema es incompatible.




Las dos rectas tienen infinitos puntos en común: el sistema es compatible indeterminado.

## Para resolver un problema mediante un sistema de ecuaciones

**1.** Se identifican las incógnitas.

**2.** Se expresa el enunciado del problema mediante sistemas de ecuaciones.

**3.** Se resuelve el sistema.

**4.** Se comprueba que las soluciones del sistema tienen sentido con respecto al enunciado del problema.