# Tema 7

# Probabilidad

# 1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades nació en 1652 en la correspondencia mantenida entre el Caballero De Meré y el filósofo, matemático e inventor Blas Pascal (1623-1662) a propósito del juego de dados. Y aún en nuestros días sigue presentándose tal teoría mencionando naipes y monedas. Sin embargo, sería un error pensar que la teoría de la probabilidad se reduce a juegos con dados o cartas. En la actualidad, la *inferencia estadística* desempeña un papel muy importante en las ciencias humanas y sociales; y en los procesos de inferencia estadística, en los que se trata de obtener conclusiones válidas para un colectivo a partir de los datos de una muestra, es indispensable utilizar el concepto de probabilidad.

➪ Como sabes, en la realidad existen *situaciones deterministas,* en las que las condiciones iniciales determinan los resultados, y *situaciones aleatorias,* en las que iguales condiciones pueden dar lugar a diferentes resultados; así, mientras que si sueltas una maceta por el balcón puedes asegurar que al poco tiempo se habrá estrellado contra el suelo (o contra algún peatón), en cambio, si lanzas una moneda al aire, te resultará imposible predecir si saldrá cara o cruz.

➪ Llamaremos *experimento aleatorio* al que podamos realizar en igualdad de condiciones tantas veces como queramos, sin que sea posible predecir el resultado cada vez que vayamos a efectuar una prueba, y llamaremos *suceso,* por ahora, a cada uno de los resultados que pueden presentarse al realizar una prueba de un experimento aleatorio.

➪ Es importante observar que cuando se realiza un gran número de pruebas, estos experimentos presentan ciertas regularidades. Así, si tras efectuar varias pruebas de un experimento, anotamos la frecuencia relativa de cierto suceso (cociente entre el número de veces que ha ocurrido tal suceso y el número de pruebas), y ello lo hacemos en repetidas ocasiones, puede comprobarse experimentalmente que tal cociente tiende a estabilizarse en torno a un número fijo al aumentar el número de pruebas. Tal hecho constituye la base del Cálculo de Probabilidades, "modelo matemático de las regularidades que se observan en las series de frecuencias correspondientes a los fenómenos aleatorios". Gracias a él podremos asignar a cada suceso de un experimento aleatorio un número que nos medirá la duda, o la certeza, de que tal suceso ocurrirá: su probabilidad.

# 2. SUCESOS

## Definiciones

① Fijado un experimento aleatorio, se llama *suceso elemental* a cada uno de los resultados que son posibles tras la realización de una prueba del experimento y admiten una forma única de realización.

➞ **Por ejemplo:** excluido que tras lanzar un dado pueda quedar apoyado sobre uno de sus vértices o aristas, un suceso elemental consistirá en obtener un 1; lo designaremos por $\alpha_1$; otro, en obtener un 2, $\alpha_2$; etc. No es suceso elemental obtener una puntuación impar, resultado que puede darse de tres formas diferentes.

② Llamaremos *espacio muestral* de un experimento aleatorio, y representaremos por E, al conjunto formado por todos los sucesos elementales. Si el espacio muestral es numerable se dirá *discreto;* en caso contrario, *continuo.*

➞ Siguiendo con el ejemplo: El espacio muestral correspondiente al lanzamiento del dado, espacio de tipo discreto, será el siguiente: $E = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4 , \alpha_5, \alpha_6 \}$

③ Llamaremos *suceso* a cualquier conjunto de sucesos elementales, es decir, a cualquier subconjunto de **E**, incluidos tanto él mismo como el subconjunto vacío, **Ø**, al que llamaremos suceso *imposible.* Si un suceso elemental $\alpha$ forma parte del suceso **A,** escribiremos $\alpha \in$ **A** (en particular, $\alpha \in \{\alpha\}$).

➞ Otra vez el dado: El suceso **A** = $\{\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \}$, por ejemplo, consistirá en obtener un 1, un 2 ó un 3.

④ Diremos que *ha ocurrido un suceso* **A** siempre que haya ocurrido cualquiera de los sucesos elementales que lo forman. Por esta razón, a **E**, conjunto de todos los sucesos elementales, se le llama también *suceso seguro.*

## Ejemplo (de espacio continuo)

➪ Supongamos, lo cual es mucho suponer, que un autobús pasara por la parada exactamente cada 15 minutos. Un experimento aleatorio podría consistir en acudir a dicha parada y medir el tiempo que tarda en llegar el autobús. Se trataría de un experimento de espacio muestral continuo, para el que:

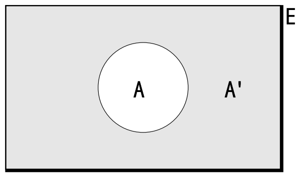
$$E = \{\alpha \in \mathbf{R} \ / 0 \le \alpha \le 15\}$$

(El ejemplo está traído por los pelos y adolece de los problemas propios de pretender ilustrar un concepto abstracto con una situación real. Además, E sería de tipo continuo sólo en teoría, porque en la práctica, y por muy preciso que fuera nuestro reloj, el conjunto de valores de $\alpha$ sería finito.)

## Operaciones con sucesos

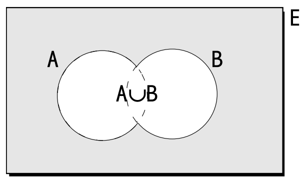
① Considerado un experimento aleatorio, llamaremos *suceso contrario* de un suceso **A** al suceso, **A'**, consistente en que no ocurra **A**; es decir, **A'** es el conjunto formado por todos los sucesos elementales que no están en **A**.

**Ejemplo:** Supón que nos dedicásemos a lanzar un dardo a un blanco y que, por *malos* que fuésemos en tal deporte, siempre lo clavásemos en el rectángulo E. Llamando **A** al suceso consistente en clavar la flecha en el círculo de la figura, el suceso **A'** consistiría en clavar la flecha en la zona gris.



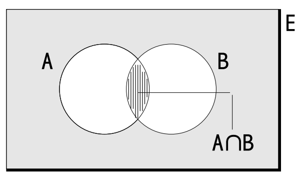

② Se llama *unión de dos sucesos* **A** y **B** y se representa por **A**$\cup$**B** a suceso consistente en que uno al menos de los dos sucesos se realice; es decir, **A**$\cup$**B** está formado por todos los sucesos elementales pertenecientes a uno al menos de los sucesos **A**, **B**.

**Ejemplo:** Sigamos con las flechas. Si el suceso **A** es el anterior y el suceso **B** el consistente en clavar la flecha en el correspondiente círculo, la unión de los sucesos **A** y **B** consistirá en clavar el dardo el cualquier punto del recinto en blanco




③ Se define la *intersección* de dos sucesos **A** y **B** y se representa por **A**$\cap$**B** como el suceso consistente en que se realicen tanto **A** como **B**; es decir, **A**$\cap$**B** está formado por todos los sucesos elementales comunes a **A** y **B**.

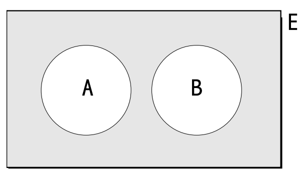
**Ejemplo:** La intersección de los sucesos **A** y **B** de la figura consistirá, como puedes suponer, en que la flecha de nuestro ejemplo quede clavada en cualquier punto de la zona rayada.




④ Dos sucesos **A** y **B** se dicen *incompatibles* si al ocurrir uno cualquiera de ellos no puede ocurrir el otro; es decir:

**A** y **B** son incompatibles si y sólo si: **A**$\cap$**B** $= \varnothing$.

**Ejemplo:** Los sucesos **A** y **B** representados a la derecha, por seguir con el juego de los dardos, son incompatibles. No hay forma de clavar la flecha simultáneamente en ambos círculos; si acertamos en uno de los blancos no lo haremos en el otro.




⑤ Si **A** y **B** pueden ocurrir simultáneamente, o sea, si su intersección no es el suceso imposible, se dice que son *compatibles.*

## Otro ejemplo

➪ Sea el experimento aleatorio consistente en sacar una carta de una baraja española de 40 naipes y consideremos los sucesos: **A** = obtener una espada. **B** = obtener un caballo. Entonces:

➪ **A'** consiste en sacar un oro, una copa o un basto.
➪ **A∪B** consiste en sacar una espada o un caballo.
➪ **A** y **B** son sucesos compatibles.
➪ **A∩B** consiste en obtener el caballo de espadas.

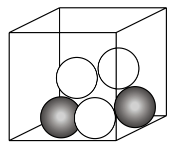
**Observación**: Cuando se estudian estos asuntos en profundidad, ha de precisarse con más rigor qué tipos de sucesos se pueden considerar, ya que si el espacio muestral es continuo, el conjunto de todos sus subconjuntos es demasiado amplio. Nosotros consideraremos sólo experimentos de espacio muestral finito y podremos tomar como suceso cualquier subconjunto de E

# 3. PROBABILIDAD

## Una experiencia previa

Dijimos en la introducción que para el estudio de los fenómenos aleatorios es importante considerar ciertas regularidades que aparecen cuando se efectúan un gran número de pruebas. Para predicar con el ejemplo, hemos realizado, con la ayuda de un ordenador, la siguiente experiencia.

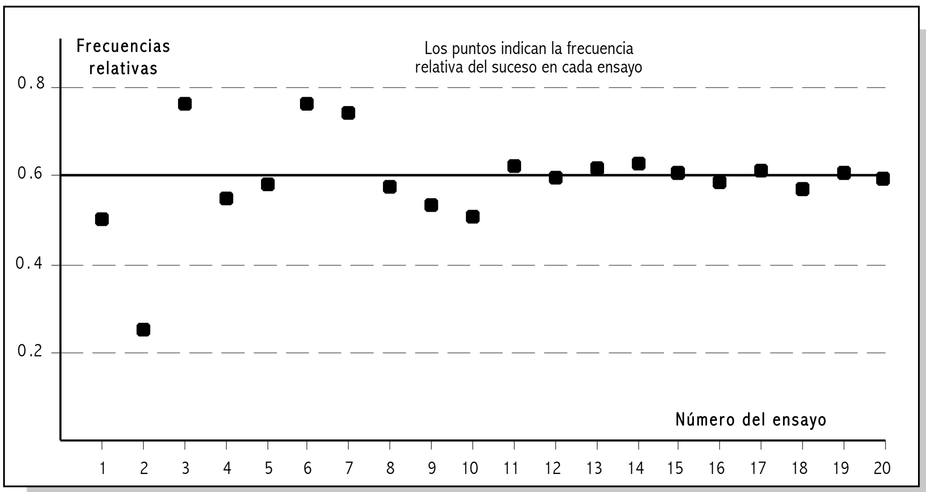
En una urna hemos colocado cinco bolas, iguales en todo, salvo en el color. Tres de ellas eran blancas y dos negras. A continuación hemos extraído una bola, hemos visto su color y la hemos devuelto a la urna. Y hemos repetido esa operación hasta un total de 10 veces. Ha salido bola blanca en 5 ocasiones. Ése ha sido el primer ensayo o conjunto de pruebas.



El segundo conjunto de pruebas ha consistido en extraer bola, devolviéndola a la urna cada vez que se anotaba su color, 20 veces. Ha vuelto a salir bola blanca en 5 ocasiones. Lo hemos anotado.

En el tercer conjunto de pruebas hemos extraído bola 30 veces, en el cuarto 40… en el décimo, 100, en el undécimo hemos sacado bola 200 veces, después 300, y así hasta el vigésimo ensayo, en el que hemos extraído una bola 2.000 veces. En esta última ocasión salió bola blanca 1.181 veces.

A continuación hemos calculado la frecuencia relativa del suceso *extraída una bola de la urna, es blanca,* en cada uno de los veinte ensayos. Es decir, hemos calculado el cociente entre el número de veces que ha salido bola blanca en cada ensayo y el número de extracciones de que dicho ensayo constaba. Por último, hemos representado dichas frecuencias relativas en el siguiente gráfico:



Dicho gráfico ha puesto claramente de manifiesto algo que ya habíamos anunciado: que *la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número fijo al aumentar el número de pruebas.* En tal verdad de carácter empírico, conocida como *ley de azar* —aunque quizás fuera mejor hablar de hipótesis, por tratarse de algo indemostrable— tiene su base la Teoría de la Probabilidad. La probabilidad de un suceso constituirá una idealización del número al que hemos llamado frecuencia relativa. Convendrá por ello que mencionemos algunas propiedades de ésta, pues es razonable que en la definición de probabilidad se incluyan como exigencias lo que en el caso de la frecuencia relativa son propiedades muy sencillas.

(Por cierto: El número al que tienden las frecuencias relativas de nuestra experiencia es 0'6, o sea, 3/5. Y recuerda que había tres bolas blancas de un total de cinco…)

## Frecuencia relativa. Propiedades

☞ Supongamos que tras efectuar N pruebas de un experimento aleatorio un suceso **A** ha ocurrido $n_A$ veces. Se define la frecuencia relativa de **A** en dicha muestra de N pruebas mediante la igualdad:

$$\boxed{f_r(\mathbf{A}) = \frac{n_A}{N}}$$

Como consecuencia de la definición anterior resulta que:

❶ Para cualquier suceso **A** y cualquier número de pruebas:

$$0 \le f_r(\mathbf{A}) \le 1$$

❷ Si **E** es el suceso seguro:

$$f_r(\mathbf{E}) = 1$$

❸ Si **B** es otro suceso, incompatible con **A**, que en las N pruebas ha ocurrido $n_A$ veces:

$$f_r(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} = f_r(\mathbf{A}) + f_r(\mathbf{B})$$

## Definición (de probabilidad)

❑ Considerado el conjunto de sucesos de un experimento aleatorio, llamaremos *probabilidad* a toda función, P, que asocie a cada suceso **A** de dicho conjunto un número P(**A**), al que llamaremos probabilidad de **A**, y cumpla:

| |
|---|
| $P(\mathbf{A}) \ge 0$, cualquiera que sea el suceso **A**. |
| $P(\mathbf{E}) = 1$, es decir, el suceso seguro ha de tener probabilidad igual a la unidad. |
| Si **A** y **B** son incompatibles, entonces: $P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B})$ |

### Observaciones

**1.-** La primera de las condiciones anteriores se expresa en ocasiones en la forma $0 \le P(\mathbf{A}) \le 1$, que guarda una mayor semejanza con la correspondiente propiedad de la frecuencia relativa; como veremos, de nuestras tres condiciones se deduce que $P(\mathbf{A}) \le 1$ (ningún suceso puede tener probabilidad mayor que 1), por lo que no es necesario incluir tal exigencia en la definición.

**2.-** Una cosa es una función probabilidad (cualquier función que asocie a cada suceso un número y cumpla las propiedades requeridas) y otra la probabilidad de un suceso, que es un número comprendido entre cero y uno (aunque a veces se hable de una probabilidad del 80%, por ejemplo, queriendo decir que su valor es 0'8).

## Propiedades de la función probabilidad

Si P es una probabilidad, se verifican:

| |
|---|
| $P(\varnothing)=0$, o sea, el suceso imposible tiene probabilidad nula |
| $P(\mathbf{A}')=1-P(\mathbf{A})$, cualquiera que sea el suceso **A** |
| Si **A** y **B** son compatibles, entonces: $P(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=P(\mathbf{A})+P(\mathbf{B})-P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$ |

☞ Observa que de la igualdad $P(\mathbf{A})+P(\mathbf{A}')=1$ se deduce que la probabilidad de cualquier suceso ha de ser menor o igual que 1.

**Las propiedades anteriores no son difíciles de demostrar:**

• La primera se deduce de que cualquiera que sea el suceso **A**, como **A** y Ø son incompatibles, se tendrá:

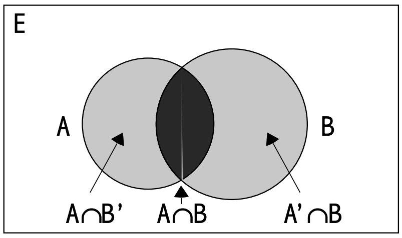
$$P(\mathbf{A})=P(\mathbf{A}\cup\varnothing)=P(\mathbf{A})+P(\varnothing),$$

luego $P(\varnothing)=0$.

• La segunda es consecuencia de que siendo un suceso **A** y su contrario **A'** incompatibles y tales que: $\mathbf{A}\cup\mathbf{A}'=\mathbf{E}$, resulta:

$$P(\mathbf{E})=P(\mathbf{A}\cup\mathbf{A}')=P(\mathbf{A})+P(\mathbf{A}')$$

• En cuanto a la tercera, por una parte se tiene:




$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}')\\ \mathbf{B} &= (\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})\\ \mathbf{A}\cup\mathbf{B} &= (\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}')\cup(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})\end{aligned}$$

y, por otra, al ser $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}')$ y $(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})$ incompatibles dos a dos:

$$\begin{aligned}P(\mathbf{A}) &= P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})+P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}')\\ P(\mathbf{B}) &= P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})+P(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})\\ P(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) &= P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})+P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}')+P(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})\end{aligned}$$

Despejando en la primera igualdad, $P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}')$; en la segunda, $P(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})$ y llevando ambos valores a la tercera, resulta, finalmente:

$$P(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=P(\mathbf{A})+P(\mathbf{B})-P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$$

# 4. CÓMO ASIGNAR PROBABILIDADES

Llegados aquí, el paso siguiente es el más delicado: cómo asignar probabilidades a los sucesos de un experimento dado. A tal fin pueden seguirse básicamente dos procedimientos, que dan lugar a las probabilidades llamadas *a posteriori* y *a priori,* respectivamente.

## Probabilidades a partir de las frecuencias relativas

Este procedimiento, basado en la hipótesis de *estabilidad de las frecuencias relativas,* consiste en determinar experimentalmente las probabilidades de los sucesos a base de considerar sus frecuencias relativas tras realizar un gran número de pruebas, e introducir, si es preciso, los ajustes necesarios. No habrá posibilidad de demostrar que la hipótesis en que nos basemos sea cierta en el sentido lógico del término, pero la experiencia muestra que ese modo de proceder, único posible en la mayoría de las aplicaciones reales del cálculo de probabilidades, es correcto. Las probabilidades así obtenidas se llaman probabilidades a posteriori.

**Ejemplo**

Te sugerimos una experiencia bien sencilla. Coge una chincheta y lánzala al aire primero en una tanda de 10 lanzamientos, luego en otra de 20, después, de 30… veces y anota la frecuencia relativa, en cada grupo de lanzamientos, del suceso que consiste en que quede con la punta hacia arriba. Haz la gráfica de esas frecuencias relativas. ¿Se aproximan los correspondientes puntos cada vez más a algún número? ¿Cuál dirías que es la probabilidad de dicho suceso?

## Probabilidades a partir de casos igualmente probables

Este segundo procedimiento, limitado a experimentos en los que el espacio muestral **E** está formado por n sucesos elementales:

$$\mathbf{E} = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , ..., \alpha_n \}$$

consiste en admitir el llamado *postulado de indiferencia,* esto es, en aceptar que no existiendo ninguna razón que favorezca la realización de uno de los sucesos elementales respecto de los otros, *todos ellos son equiprobables;* o, con más rigor: que los sucesos formados por un solo suceso elemental tienen igual probabilidad:

$$P[\{\alpha_1\}] = P[\{\alpha_2\}] = P[\{\alpha_3\}] = \cdots = P[\{\alpha_n\}]$$

La hipótesis anterior, debido a lo difícil que resulta en la realidad asegurar que los sucesos elementales son equiprobables, limita este método a casos más bien teóricos. Pero, aceptada tal hipótesis, como los sucesos $\{\alpha_i\}$ son incompatibles dos a dos y, además:

$$\mathbf{E} = \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \cup \{\alpha_3\} \cup \cdots \cup \{\alpha_n\}$$

resulta:

$$P[\mathbf{E}] = P[\{\alpha_1\}] + P[\{\alpha_2\}] + P[\{\alpha_3\}] + \cdots + P[\{\alpha_n\}] = 1$$

y, por consiguiente:

$$P[\{\alpha_i\}] = \frac{1}{n}$$

Considerado, ahora, un suceso **A**, bastará con determinar los **h** sucesos elementales que lo formen (o sea, las **h** posibles maneras diferentes en que se realiza):

$$\mathbf{A} = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \cdots, \alpha_{i_h}\}$$

para poder escribir:

$$P[\mathbf{A}] = P\left(\{\alpha_{i_1}\} \cup \{\alpha_{i_2}\} \cup \{\alpha_{i_3}\} \cup \cdots \cup \{\alpha_{i_h}\}\right) = \mathbf{P}(\{\alpha_{i_1}\}) + \mathbf{P}(\{\alpha_{i_2}\}) + \mathbf{P}(\{\alpha_{i_3}\}) + \cdots + \mathbf{P}(\{\alpha_{i_h}\}) = \frac{h}{n}$$

La probabilidad de un suceso vendrá, pues, dada por el *cociente entre el número de casos favorables a la verificación de dicho suceso y el número de casos posibles,* que es la clásica Regla de Laplace. Se dice que es una probabilidad *a priori* porque para ser establecida no necesita de experimentación previa.

Regla de Laplace ☞ $\text{Probabilidad de un suceso} = \dfrac{\text{Núm. de casos favorables}}{\text{Núm. de casos posibles}}$

## Ejemplos

① Supongamos que lanzamos un dado bien construido. Considerados los seis sucesos elementales $\alpha_i$, se tendrá: $P[\alpha_i] = \dfrac{1}{6}$

Entonces, considerado, por ejemplo, el suceso **A** consistente en obtener puntuación impar, al ser: $\mathbf{A} = \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \cup \{\alpha_3\}$ se tendrá:

$$P[\mathbf{A}] = P\left(\{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \cup \{\alpha_3\}\right) = \mathbf{P}(\{\alpha_1\}) + \mathbf{P}(\{\alpha_2\}) + \mathbf{P}(\{\alpha_3\}) = \frac{3}{6}$$

resultado al que también hubiéramos llegado dividiendo el número de casos favorables a la obtención de puntuación impar entre el número de casos posibles.

② Lanzamos al aire tres monedas. Los casos posibles son ocho. Los casos favorables a obtener 2 caras, son tres. La probabilidad de obtener dos caras será, por consiguiente 3/8.

# 5. ALGO DE COMBINATORIA

La aplicación de la regla de Laplace se ve facilitada si se manejan con soltura algunos conceptos de combinatoria ya conocidos de otros cursos. Los recordamos en lo que sigue, sin ánimo de ser exhaustivos y con el consejo de que cuando tengas que resolver un problema de probabilidad, más que de utilizar fórmulas, trates de hacer un razonamiento específico para el caso del que se trate.

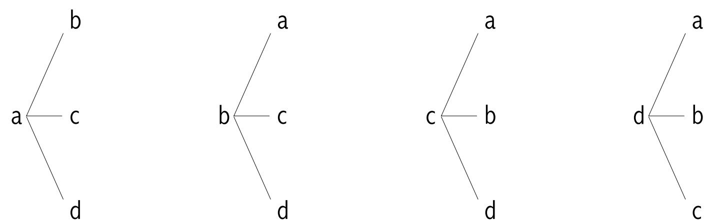
## Variaciones sin repetición

Supongamos que disponiendo de cuatro elementos distintos: a, b, c y d, quisiéramos formar tantos grupos como fuera posible con tres de ellos, considerando distintos dos de tales grupos cuando, aun constando de los mismos elementos, éstos se hallaran en distinto orden. Una forma sistemática de proceder consistiría en formar, en primer lugar, todas las agrupaciones de un solo elemento:

a b c d

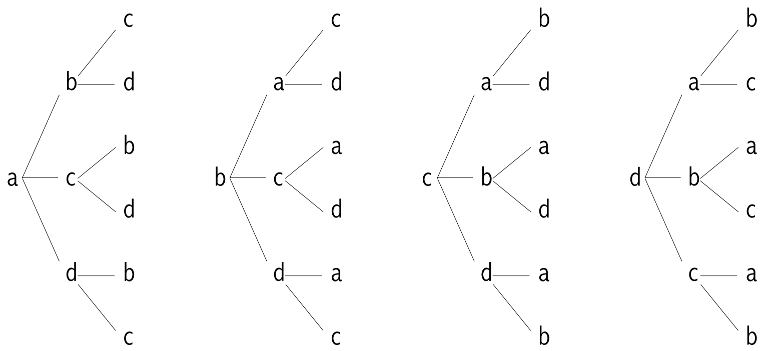
Núm. de grupos de 1 elemento = 4

Para formar los grupos de 2 elementos bastaría con añadir a cada uno de los grupos anteriores todos y cada uno de los elementos que no forman parte de él:




Núm. de grupos de 2 elementos = 4.3

Finalmente, los grupos posibles de 3 elementos se formarían así:




Núm. de grupos de 3 elementos = 4.3.2

Tendríamos entonces las variaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3. Su número se representa por $V_{4,3}$ y, como hemos visto: $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

➠ En general, si disponiéndose de **m** elementos distintos entre sí se forman todos los grupos posibles con **n** de dichos elementos (supuesto m≥n), considerando dos grupos diferentes cuando difieren en algún elemento o en el orden en que éstos aparecen, se obtienen las llamadas v*ariaciones de orden n de los m elementos.* Su número es:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1)$$

## Ejemplo

Con los 25 alumnos de un curso de 2º de Bachillerato quieren formarse equipos de 6 personas, cada una de las cuales ha de encargarse de una tarea distinta. ¿Cuantos grupos pueden formarse? Solución: 127.512.000

## Variaciones con repetición

➠ Si al formar las variaciones de orden n a partir de m elementos se pueden repetir éstos, se obtienen las llamadas *variaciones con repetición de orden n de los m elementos.* Para hallar su número, $V_{m,n}$, basta con pensar en que cada una de las m variaciones de orden 1 da lugar a m variaciones de orden 2; cada una de éstas, a otras m de orden 3, etc.

Puede haber m elementos diferentes — Puede haber m elementos diferentes — Puede haber m elementos diferentes — - - - — Puede haber m elementos diferentes

Hay un total de **n** lugares

Será, pues:

$$V_{m,n} = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$$

## Permutaciones sin repetición

➠ A las variaciones sin repetición de orden **m** de **m** elementos (grupos que sólo se distinguen en el orden en que los m elementos aparecen) suele llamárselas *permutaciones de m elementos,* utilizándose el símbolo $P_m$ para indicar su número. En consecuencia:

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

producto que también se representa por m ! *(factorial de m).*

➪ (En el caso particular de que m = 0, se define 0! = 1).

## Combinaciones sin repetición

➠ Hasta ahora hemos supuesto que el orden en el que aparecen los elementos de un grupo influye en el resultado final; y eso es cierto, por ejemplo, en el caso de **AMOR** y **ROMA** , palabras bien distintas aunque estén formadas por las mismas letras. Pero no siempre sucede así: Si las letras **a**, **b**, **c** y **d** representan las cuatro preguntas de un examen, de las que hay que elegir tres, daría lo mismo elegir las preguntas **a**, **b** y **c** que las **c**, **a** y **b**, o las **c**, **a** y **b**, etc. Es decir, lo que eran 6 variaciones de cuatro elementos tomados de tres en tres: **abc**, **acb**, **bac**, **bca**, **cab**, **cba** quedan reducidas a una sola. El número total de grupos que podrían formarse con este nuevo criterio sería el resultado de dividir $V_{4,3}$ entre 6; es decir, entre $P_3$.

➠ Llamaremos *combinación de m elementos tomados de **n** en **n*** a cada uno de los grupos que pueden formarse con **n** de entre los m elementos (supuesto m≥n), considerándose dos grupos diferentes sólo si se distinguen en algún elemento. Su número, al que representaremos por $\mathbf{C_{m,n}}$, viene dado por la igualdad:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

☞ Es fácil comprobar —basta con multiplicar numerador y denominador por (m–n)!— que el cociente anterior puede expresarse de esta otra forma, conocida como *número combinatorio m sobre n:*

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{m! \cdot (m-n)!}$$

## Ejemplo

En la Lotería Primitiva hay que acertar 6 números, de entre 49. Para asegurarse el primer premio hay que efectuar *sólo* $C_{49,6}$ apuestas, o sea, 13.983.816

# 6. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Los conceptos de probabilidad condicionada y de independencia estocástica son de importancia capital en la teoría de probabilidades. Para definir la probabilidad condicionada procederemos de forma semejante a como hicimos al definir la probabilidad: nos apoyaremos en las propiedades de las frecuencias relativas. Adelantaremos que si con la probabilidad simple lo que pretendíamos era "medir la duda o la certeza" de que se produjera un suceso sin más, con la probabilidad condicionada lo que intentaremos medir será la duda (o la certeza) de que ese suceso se verifique, supuesto que se verificase otro.

## Cuestión previa

☞ Supongamos que tras efectuar N pruebas de un experimento aleatorio, cierto suceso **A** ha ocurrido $n_A$ veces y, de entre esas $n_A$ veces que ha ocurrido **A**, otro suceso **B** ha ocurrido $n_{AB}$ veces. Se tendrá:

$$f_r(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{n_{AB}}{N} = \frac{n_{AB}}{n_A} \cdot \frac{n_A}{N} = \frac{n_{AB}}{n_A} \cdot f_r(\mathbf{A})$$

Es decir:

$$\frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{f_r(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{f_r(\mathbf{A})}$$

cociente que mide la frecuencia relativa con la que ocurre **B**, en relación con el número total de veces en que ocurre **A**.

## Probabilidad condicional

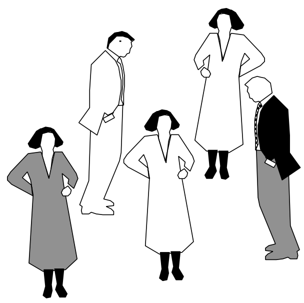
➭ Considerados un experimento aleatorio y uno de sus sucesos, **A**, al que corresponde una probabilidad P(**A**)>0, puede demostrarse que la función que a cualquier otro suceso **B** del mismo experimento hace corresponder el número:

$$\boxed{P(\mathbf{B} / \mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})}}$$

también es una probabilidad. De P(**B**/**A**) diremos que es la *probabilidad condicional del suceso **B** respecto del suceso **A*** (o, también, que es la probabilidad del suceso **B** condicionado al suceso **A**).

## Ejemplos

① La figura de la derecha representa un conjunto de cinco personas esperando a otra para celebrar una reunión. Dos son hombres y hay tres que visten de blanco. El experimento que vamos a realizar consiste en elegir una persona al azar. Y los sucesos que consideraremos son éstos:



**A**: *La persona elegida es hombre.* **B**: *La persona viste de blanco.*

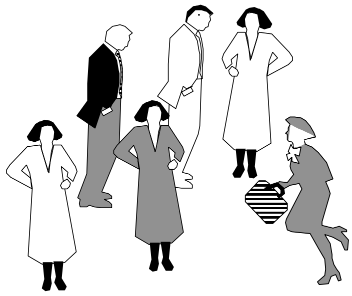
Es inmediato que:

$$P(\mathbf{A}) = \frac{2}{5}; \quad P(\mathbf{B}) = \frac{3}{5}$$

De modo que, efectivamente, antes de saber si la persona elegida es hombre o mujer, la probabilidad que asignamos a que vista de blanco es 3/5; o sea, del 60%. Pero supongamos que *ya supiéramos que la persona elegida es hombre.* En ese caso, parece razonable que la probabilidad que le asignásemos al suceso consistente en vestir de blanco fuera distinta a la anterior. ¿Cuál sería esta nueva probabilidad? Hela aquí:

$$P(\mathbf{B} / \mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

② Al grupo anterior llega por fin la persona que faltaba. Ahora se tendría:



$$P(\mathbf{A})=\frac{1}{3};\quad P(\mathbf{B})=\frac{1}{2}$$

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A})=\frac{P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})}{P(\mathbf{A})}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{2}$$

**Observa** algo interesante: En el primer ejemplo, la ocurrencia del suceso **A** hace que modifiquemos la probabilidad que se asigna a **B**. En el segundo ejemplo, sin embargo, suponer que haya sucedido **A** no modifica la probabilidad de **B**. Aparecen así los conceptos de *dependencia e independencia estocástica,* que luego definiremos.

## Probabilidad compuesta

➪ La igualdad con la que se define la probabilidad condicional de un suceso **B** respecto de otro **A**:

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A})=\frac{P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})}{P(\mathbf{A})}\qquad (\text{Si } P(\mathbf{A})\neq 0)$$

puede ser escrita de esta otra forma:

$$\boxed{P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A})\qquad (\text{Si } P(\mathbf{A})\neq 0)}$$

expresión llamada *fórmula de la probabilidad compuesta.*

➪ Para el caso de tres sucesos se tendría:

$$P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=P\big[(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{C}\big]=P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cdot P[\mathbf{C}/(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})]=P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A})\cdot P[\mathbf{C}/(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})]\qquad (\text{si } P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\neq 0)$$

➪ Para el caso de n sucesos:

$$P(\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2\cap\mathbf{A}_3\cap\ldots\cap\mathbf{A}_n)=P(\mathbf{A}_1)\cdot P(\mathbf{A}_2/\mathbf{A}_1)\cdot P[\mathbf{A}_3/(\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2)]\cdot\ldots\cdot P[\mathbf{A}_n/(\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2\ldots\cap\mathbf{A}_{n-1})]\quad \text{si } P(\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2\ldots\cap\mathbf{A}_{n-1})\neq 0$$

## Sucesos dependientes e independientes

① De acuerdo con lo visto antes, si **A** y **B** son dos sucesos de un cierto experimento aleatorio, en general es $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \neq P(\mathbf{B})$, y se dice que **B** depende de **A**. Pero, en tal caso:

$$P(\mathbf{A}/\mathbf{B})=\frac{P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})}{P(\mathbf{B})}=\frac{P(\mathbf{B}/\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{A})}{P(\mathbf{B})}\neq P(\mathbf{A})$$

y **A** dependerá de **B**. Diremos que **A** y **B** son sucesos *dependientes.*

Se tendrá, recordemos:

$$P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A})$$

② Por el contrario, si $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = P(\mathbf{B})$, entonces también será $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})$ y diremos que **A** y **B** son sucesos independientes.

En este caso:

$$P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B})$$

➨ En general, se dice que n sucesos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ son mutuamente independientes si la probabilidad de que se verifiquen simultáneamente cualquier número de ellos es igual al producto de sus probabilidades respectivas.

# 7. PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

## Ejemplo previo

✷ Celebradas elecciones en una ciudad, los partidos $X_1$, $X_2$ y $X_3$ obtuvieron el 40%, el 35% y el 25%, respectivamente, de los concejales. Se sabe que la probabilidad de que un miembro del partido $X_1$ sea mujer es 0'3; la de que lo sea alguien del partido $X_2$, 0'2; y la de que lo sea alguien del partido $X_3$, 0'4. Se celebra la primera sesión del ayuntamiento y hay que elegir por sorteo un concejal para que la presida. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte elegida una mujer?

Considerados los sucesos:

**B**: *La persona elegida es mujer.* **A** $_i$: *La persona elegida pertenece al partido* $X_i$ $(i = 1, 2,3)$.

se tiene:

$$P(\mathbf{A}_1)=\frac{40}{100} \qquad P(\mathbf{A}_2)=\frac{35}{100} \qquad P(\mathbf{A}_3)=\frac{25}{100}$$

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)=0'3 \quad P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)=0'2 \quad P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_3)=0'4$$

Por otra parte, los sucesos $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ son incompatibles dos a dos y tales que: $\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\mathbf{A}_3=\mathbf{E}$ . Además, $\mathbf{B}=\mathbf{B}\cap\mathbf{E}$, luego:

$$P(\mathbf{B})=P[\mathbf{B}\cap(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\mathbf{A}_3)]=P[(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_2)\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_3)]$$

y al ser los sucesos $(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_i)$ incompatibles dos a dos:

$$P(\mathbf{B})=P(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_i)+P(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_2)+P(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_3)$$

Por último, aplicando la fórmula de la probabilidad compuesta:

$$P(\mathbf{B})=P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)\cdot P(\mathbf{A}_1)+P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)\cdot P(\mathbf{A}_2)+P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_3)\cdot P(\mathbf{A}_3)=0'3\cdot\frac{40}{100}+0'2\cdot\frac{35}{100}+0'4\cdot\frac{25}{100}=\frac{29}{100}$$

## Caso general

Sean n sucesos $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, … $\mathbf{A}_n$, incompatibles dos a dos, tales que: $\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\ldots\cup\mathbf{A}_n=\mathbf{E}$ y de los que se conocen las probabilidades $P(\mathbf{A}_i) > 0$. Sea **B** otro suceso del que son conocidas las probabilidades condicionales $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_i)$. Entonces:

$$P(\mathbf{B})=P[\mathbf{B}\cap(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\ldots\cup\mathbf{A}_n)]=P[(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_2)\cup\ldots\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}_n)]$$

y, por tanto:

$$\boxed{P(\mathbf{B})=P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)\cdot P(\mathbf{A}_1)+P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)\cdot P(\mathbf{A}_2)+\ldots+P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_n)\cdot P(\mathbf{A}_n)}$$

igualdad que se conoce como *fórmula de la probabilidad total.*

## Teorema de Bayes

En las condiciones anteriores, ¿cuál sería la probabilidad del suceso $\mathbf{A}_i/\mathbf{B}$?

Dado que

$$P(\mathbf{A}_i/\mathbf{B})=\frac{P(\mathbf{A}_i\cap\mathbf{B})}{P(\mathbf{B})}$$

sería:

$$P(\mathbf{A}_i/\mathbf{B})=\frac{P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_i)\cdot P(\mathbf{A}_i)}{P(\mathbf{B})}=\frac{P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_i)\cdot P(\mathbf{A}_i)}{P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)\cdot P(\mathbf{A}_1)+P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)\cdot P(\mathbf{A}_2)+\ldots+P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_n)\cdot P(\mathbf{A}_n)}$$

La importancia de la igualdad anterior, conocida como *fórmula de Bayes* estriba en que mediante ella pueden calcularse probabilidades *a posteriori;* esto es, probabilidades de lo que podrían llamarse *causas,* conocidos los *efectos.*

## Ejemplo

Volviendo al caso del ayuntamiento anterior, supongamos ahora que la persona elegida ha sido mujer. ¿Cuál será la probabilidad de que pertenezca al partido $X_2$?

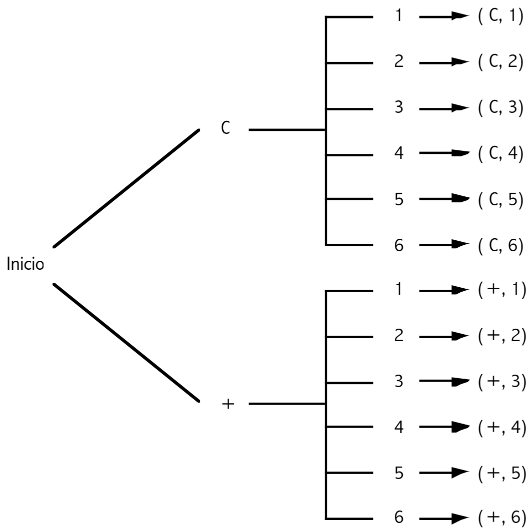
De acuerdo con la fórmula de Bayes:

$$P(\mathbf{A}_2/\mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)\cdot P(\mathbf{A}_2)}{P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)\cdot P(\mathbf{A}_1) + P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)\cdot P(\mathbf{A}_2) + P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_3)\cdot P(\mathbf{A}_3)} = \frac{7}{25}$$

# 8. PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS SUCESIVOS

## Cuestión previa

Hasta ahora hemos considerado exclusivamente experimentos simples, que no pueden descomponerse en otros más sencillos. Pero en ocasiones un experimento aleatorio consiste en la realización, uno tras otro, de varios experimentos más sencillos. Tal cosa sucede si, por ejemplo, lanzamos una moneda y, a continuación, un dado. Los espacios muestrales en estos casos pueden construirse sin dificultad mediante los llamados diagramas de árbol, como se ve en el siguiente diagrama, correspondiente al lanzamiento de la moneda y el dado.
Como puede verse, el espacio muestral de un experimento compuesto de dos experimentos simples, de espacios muestrales $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$, es el producto cartesiano $\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2$ de dichos espacios muestrales. Los sucesos de este nuevo experimento serán, por consiguiente, los subconjuntos de $\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2$ (así, en el ejemplo, un suceso sería: {(C,2), (C,3), (+,3)}, pongamos por caso). La cuestión clave es ésta: ¿Cómo asignar probabilidades a los sucesos de los experimentos compuestos? Para responder, distinguiremos entre dos supuestos: que los experimentos simples que forman el experimento compuesto sean físicamente independientes o dependientes. Dedicaremos las siguientes líneas a precisar esta idea.




## Experimentos independientes

➪ Sea un experimento consistente en la realización sucesiva de otros dos experimentos, tales que el resultado que se produzca al realizar el primero de ellos no modifique las condiciones en que se efectúa el segundo. Y sean $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ los correspondientes espacios muestrales. Pues bien:

① Si $(\alpha_i . \beta_j)$ es un suceso elemental correspondiente al espacio producto $\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2$, tomaremos como base la fórmula de la probabilidad compuesta para sucesos independientes, $P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B})$ , para establecer como probabilidad de $\{(\alpha_i . \beta_j)\}$:

$$P\{(\alpha_i . \beta_j)\} = P\{(\alpha_i)\}\cdot P\{(\beta_j)\}$$

y, así, en el ejemplo anterior, al tratarse de experimentos independientes, en tanto que el resultado del lanzamiento de la moneda no influye en el lanzamiento del dado, se tendría, pongamos por caso:

$$P[\{(\mathbf{C},\mathbf{5})\}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

② La probabilidad de un suceso que consista en la realización de varios sucesos elementales de $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ la calcularemos como hasta ahora, sumando las probabilidades de cada uno de dichos sucesos elementales. Así, en nuestro ejemplo:

$$P[\{(\mathbf{C},\mathbf{3}),(\mathbf{+},\mathbf{3}),(\mathbf{+},\mathbf{6})\}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

▲ En particular, puede ocurrir que uno o los dos sucesos simples que forman el suceso del experimento compuesto no sean elementales. En ese caso, el problema se resuelve como antes, expresando tal suceso como unión de los oportunos sucesos elementales de $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, la suma de cuyas probabilidades será la probabilidad buscada. En nuestro ejemplo, si considerásemos el suceso consistente en sacar *cara* en la moneda y puntuación impar en el dado, tendríamos:

$$P(\mathbf{C}, \text{impar}) = P[\{(\mathbf{C},\mathbf{1})] + P[\{(\mathbf{C},\mathbf{3})] + P[\{(\mathbf{C},\mathbf{5})] = \frac{1}{4}$$

☞ Observa que esta probabilidad coincide con el producto de las probabilidades de uno y otro suceso por separado:

$$P(\mathbf{C}, \text{impar}) = P(\mathbf{C})\cdot P(\text{impar}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

y esta última forma de cálculo, consistente en aplicar la igualdad:

$$P(\mathbf{A},\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B})$$

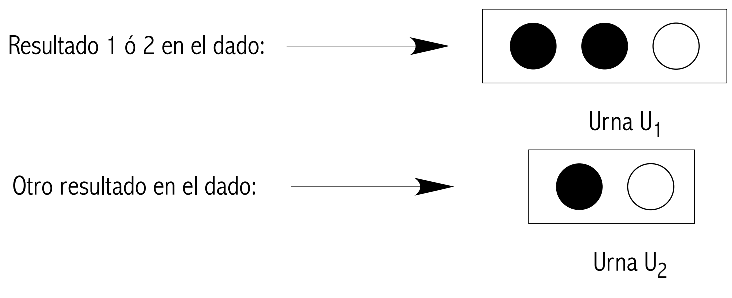
para calcular la probabilidad de que en el primer experimento suceda **A** y en el segundo **B**, quizás sea la más recomendable.

## Experimentos dependientes

➪ Cuando estemos ante un experimento compuesto de otros dos, pero tales que el resultado del primero sí modifique las condiciones en que se efectúa el segundo, procederemos de forma semejante a la anterior, pero tomando como base la fórmula de la probabilidad compuesta para sucesos dependientes, $P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A})$, pero con una salvedad: que la probabilidad *condicional* en el segundo experimento no podrá entenderse en sentido estricto, sino como la probabilidad, que habremos de calcular con criterios particulares en cada caso, de que habiendo ocurrido cierto suceso en el primer experimento, en el segundo ocurra otro. Lo más oportuno será ilustrar lo que decimos con un ejemplo sencillo.

## Ejemplo

◆ Se tienen un dado y dos urnas. En la primera, $U_1$, hay 2 bolas negras (N) y 1 bola blanca (B); en la segunda, $U_2$, 1 bola negra y otra blanca. El experimento que vamos realizar consiste en lanzar el dado, en primer lugar, y observar su puntuación. Si sale un 1 ó un 2, (suceso $\mathbf{A}_1$), extraeremos una bola de $U_1$. Si la puntuación obtenida es superior a 2 (suceso $\mathbf{A}_2$), la bola la extraeremos de $U_2$:




Como la probabilidad de que la bola que se extraiga sea blanca o negra se modifica según sea la puntuación obtenida tras lanzar el dado, se trata de experimentos dependientes. Las probabilidades *condicionadas,* de acuerdo con la regla de Laplace, serán:

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)=\frac{1}{3};\quad P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)=\frac{1}{2};\quad P(\mathbf{N}/\mathbf{A}_1)=\frac{2}{3};\quad P(\mathbf{N}/\mathbf{A}_2)=\frac{1}{2}.$$

donde $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)$, por ejemplo, es la probabilidad de que habiéndose obtenido un 1 ó un 2 al lanzar el dado y, en consecuencia, habiendo extraído una bola de $U_1$, ésta sea blanca.

■ Llegados a este punto, las probabilidades que pueden interesar son de uno de estos dos tipos:

➔ Probabilidad de obtener una puntuación igual a 1 ó 2 y bola negra, por ejemplo.

Bastaría con que calculásemos:

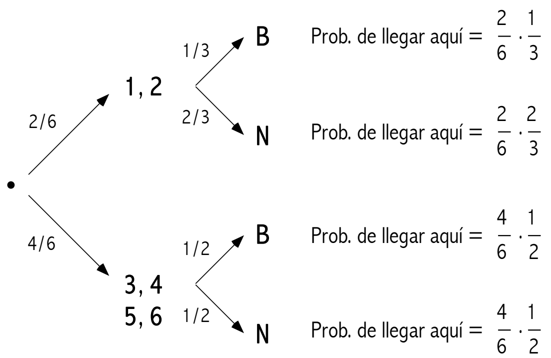
$$P(\mathbf{A}_1, \mathbf{N}) = P(\mathbf{A}_1) \cdot P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

➔ Probabilidad de que la bola extraída sea negra, también por ejemplo.

Basándonos en la fórmula de la probabilidad total, escribiríamos:

$$P(\mathbf{N}) = P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_1) \cdot P(\mathbf{A}_1) + P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_2) \cdot P(\mathbf{A}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

☞ Si preferimos ayudarnos de diagramas podemos hacer uno como el siguiente. En él se observa que para calcular P(**B**), por ejemplo, bastaría con sumar las probabilidades de llegar a **B** por todos los caminos posibles.




## Observaciones finales

Lo dicho líneas atrás es fácilmente generalizable al caso de experimentos compuestos de más de dos experimentos simples. Y, en particular, al caso, bastante frecuente, de que el experimento que efectuemos consista en realizar repetidamente un mismo experimento simple. El caso más característico puede ser el de la extracción, una tras otra, de varias bolas de una urna. Según se trate de extracciones *con devolución* (cada bola extraída se reintegra a la urna antes de extraer la siguiente) o *sin devolución,* estaremos ante una composición de experimentos independientes o dependientes.

Así, por ejemplo, si de una urna en la que hay 4 bolas blancas (**B**), 2 bolas rojas (**R**) y 6 negras (**N**), se extraen una tras otra, con devolución, tres bolas, la probabilidad de (**R**, **B**, **B**) será:

$$P(\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{B}) = P(\mathbf{R}) \cdot P(\mathbf{B}) \cdot P(\mathbf{B}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12}$$

En cambio, si la extracciones se hicieran sin devolución, la probabilidad de ese mismo suceso sería:

$$P(\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{B}) = P(\mathbf{R}) \cdot P(\mathbf{B} / \mathbf{R}) \cdot P[\mathbf{B} / (\mathbf{R},\mathbf{B})] = \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10}$$

(Como se puede suponer, $P[\mathbf{B} / (\mathbf{R},\mathbf{B})]$ es la probabilidad de que habiendo salido bola roja en la primera extracción y blanca en la segunda, en la tercera salga blanca.)

▲ Añadiremos, para finalizar, que el experimento que consiste en extraer una tras otra varias bolas de una urna, sin devolución, o varias cartas de una baraja, también sin devolución, es equivalente, a todos los efectos, al consistente en sacar simultáneamente dichas bolas o dichos naipes.

# 7. EJERCICIOS

**1.-** Se extrae una carta de una baraja española y se consideran los sucesos: **A** = Sale una sota. **B** = Sale una espada. Di cuántos sucesos elementales forman los sucesos: $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$, $\mathbf{A}'\cap\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}'$.

**2.-** **A** y **B** son dos sucesos tales que $P(\mathbf{A})=\frac{3}{4}$, $P(\mathbf{B}')=\frac{2}{3}$, $P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=\frac{1}{4}$. Calcula $P(\mathbf{A}')$ y $P(\mathbf{A}'\cap\mathbf{B})$.

**3.-** Se lanzan 2 dados. Siendo **A** el suceso la suma de puntos es par y **B** el al menos se obtiene un uno, calcula $P(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$.

**4.-** Un jugador empedernido se dirigió a Galileo extrañado de que al lanzar tres dados la suma 10 apareciera con más frecuencia que la 9, cuando, según él, los casos favorables a la suma 9 serían seis (126, 135, 144, 225, 234, 333) y los favorables a 10 (136, 145, 226, 235, 244, 334) también serían seis. ¿Qué opinas tú sobre eso?

**5.-** De una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras se extraen simultáneamente 3 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean blancas? ¿Y de que sean de distinto color? ¿Y la de que dos sean rojas y la otra negra?

**6.-** Un profesor distraído escribe tres cartas a tres amigos diferentes y, al introducirlas en los sobres, lo hace al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de sus amigos reciba su carta? ¿Y la de que ninguno reciba la suya?

**7.-** En cierto país, la probabilidad de que un hombre de 25 años llegue a los 75 años es de 0'8. Calcula la probabilidad de que si elegimos tres hombres de 25 años de dicho país: a) Sólo uno llegue a los 75 años. b) Al menos uno llegue a los 75 años.

**8.-** De una baraja española de 40 naipes se extraen simultáneamente 3 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo *palo?*

**9.-** ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando una moneda 12 veces salga al menos una *cara?* ¿Y la de lograr 12 *caras* o 12 *cruces?*

**10.-** Calcula la probabilidad de que en un grupo de diez personas haya dos, al menos, que cumplan años el mismo día.

**11.-** De una urna en la que hay cuatro bolas blancas y seis negras se extraen una tras otra, con devolución, cinco bolas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres blancas?

**12.-** Una caja contiene cinco lámparas eléctricas, de las que dos están defectuosas. Si probamos una tras otra hasta localizar las dos defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de suspender el proceso en la tercera prueba?

**13.-** El problema que el Caballero de Meré propuso a Pascal consistía, más o menos, en averiguar cuántas veces había que lanzar un par de dados para que la probabilidad de obtener un 6 doble fuera mayor que la de no obtenerlo. ¿Cuál es la respuesta?

**14.-** Se tiene una baraja española de 40 naipes y se extraen uno tras otro, sin devolución, tres de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as, un rey y otro as, en ese orden?

**15.-** Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?

**16.-** Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos. Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen? ¿Qué probabilidad tiene de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

**17.-** Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.

**18.-** Calcula la probabilidad de que un lanzador de arco acierte en un blanco, sabiendo que puede hacer tres intentos y que la probabilidad de acierto en cada intento es 0'25.

**19.-** Un alumno hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide: **a)** Probabilidad de que pase al menos una prueba. **b)** Probabilidad de que no pase ninguna prueba. **c)** ¿Son las pruebas sucesos independientes? **d)** Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

**20.-** Las probabilidades que tienen tres personas de resolver cierto problema de probabilidades son 1/3, 1/4 y 1/5, respectivamente. Calcula la probabilidad de que, propuesto tal problema a las tres personas: **a)** el problema sea resuelto; **b)** el problema sea resuelto exactamente por dos personas.

**21.-** El 30% de las ratas inyectadas con una sustancia mueren antes de los 2 días, y el 60% sobreviven 3 días. Calcula la probabilidad de que una rata que ha sobrevivido 2 días sobreviva 3 días.

**22.-** Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas. **a)** Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca? **b)** Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

**23.-** Una urna contiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color? ¿Y la de que sean del mismo color?

**24.-** Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna B tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A.

**25.-** Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas. **a)** Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean rojas? **b)** Si las dos bola extraídas resultan ser rojas, ¿cuál es la probabilidad de que procedan de la urna B?

**26.-** Una urna contiene tres bolas blancas y cinco negras. Otra, dos bolas blancas y tres negras. Se extrae una bola de la primera urna, se introduce en la segunda y, a continuación, se extrae bola de ésta última. Calcula la probabilidad de que esta bola sea blanca. ¿Y si la primera bola se hubiera extraído de la segunda urna y la segunda de la primera?

**27.-** En cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar: **a)** Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños? **b)** Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños? **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

**28.-** En un país donde cierta enfermedad es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

**29.-** En tres máquinas, A, B y C, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%. Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

**30.-** Una caja A contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja B contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de A a B y después se extrae una bola de B, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.

**31.-** Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna B, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la B.

**32.-** Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.

**33.-** Sean A y B dos montones de cartas. En A hay ocho oros y cinco espadas y, en B, cuatro oros y siete espadas. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son espadas. Halla la probabilidad de que las hayamos sacado del montón B.

**34.-** El 60% de los alumnos de un instituto son chicas. Fuman el 40% de las chicas y el 30% de los chicos. Se ve a cierta persona en un pasillo, escondiéndose para la práctica de tan nefasto vicio. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

**35.-** Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes, etc.)? ¿Y la de que hayan nacido en el mismo mes?

**36.-** Dos jugadores (A y B) inician cierto juego con 3 € cada uno. Al finalizar cada partida, el ganador recibe 1 € del perdedor. Sabiendo que A tiene probabilidad 0,6 de ganar cada partida y que el juego finaliza cuando alguno de los dos se queda sin dinero **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 2 € tras jugar 2 partidas? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 4 € tras jugar 3 partidas? **c)** ¿Cuál es la probabilidad de finalizar el juego tras jugar 3 partidas?

**37.-** En un local público hay un total de 100 personas, de las cuales 55 son aficionadas al teatro. Sabiendo que el 60% de las personas aficionadas al teatro son mujeres y que el 45% de las personas no aficionadas al teatro son varones, ¿cuál es la probabilidad de que seleccionada al azar una persona en ese local público, resulte ser varón?

**38.-** A partir de la información recogida en el censo municipal de cierta ciudad, se ha determinado que un 40% de sus residentes tienen menos de 30 años, y que un 5% del total de personas con menos de 30 años, tienen menos de 10 años. Si se elige al azar una persona en dicha ciudad y denotamos por X su edad en años cumplidos obtén: **a)** $P(X \geq 10)$ **b)** $P(10 \leq X < 30)$.

**39.-** En una empresa figuran en nómina un total de 1000 personas, de las cuales 350 son mujeres. Sabiendo que los transportes públicos son utilizados para acudir al trabajo, por un 40 % de los varones, y no son utilizados por el 25 % de las mujeres, obtén la probabilidad de que elegida al azar una persona en dicha empresa, resulte ser usuaria de los transportes públicos para acudir a su trabajo.

**40.-** El personal de cierta empresa está constituido por un 60% de personal obrero, un 25% de personal técnico, siendo el resto personal administrativo. A todos los trabajadores de dicha empresa se les pregunta si estarían dispuestos a admitir una reducción en el número de horas semanales de trabajo con la consiguiente disminución económica en su nómina. Contesta afirmativamente un 40% del personal obrero, un 30% del personal técnico y un 60% del personal administrativo. Si seleccionamos al azar un trabajador en esa empresa, determina la probabilidad de que: **a)** Haya contestado afirmativamente. **b)** Pertenezca al personal administrativo y haya contestado negativamente.

**41.-** El equipo directivo de cierta empresa del sector de la hostelería está constituido por 25 personas, de las que un 60% son mujeres. El gerente tiene que seleccionar a una persona de dicho equipo para que represente a la empresa en un certamen internacional. Decide lanzar una moneda; si sale cara selecciona a una mujer y si sale cruz a un hombre. Sabiendo que 5 mujeres y 3 hombres del equipo directivo no hablan inglés, determina la probabilidad de que la persona seleccionada hable inglés.

**42.-** En un laboratorio se estudia el comportamiento de ciertos ratones ante una vacuna. El 60% de los ratones son machos y el resto hembras. Por experiencias anteriores se sabe que la probabilidad de que uno de los ratones macho reaccione ante la vacuna es 0,25, y la de que reaccione una hembra 0,4. Se elige un ratón al azar y se comprueba que no ha reaccionado ante la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hembra?

**43.-** En un estudio realizado en cierta universidad se ha determinado que un 20% de sus estudiantes no usan los transportes públicos para acudir a sus clases y que un 65% de los estudiantes que utilizan los transportes públicos también hacen uso del comedor universitario. Calcula la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante en esa universidad resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

**44.-** Una empresa dedicada a la fabricación de componentes eléctricas somete su producción a un control de calidad. En el proceso de control la componente ha de superar tres controles ($C_1$, $C_2$ y $C_3$, en ese orden). El control $C_1$ la rechaza con probabilidad 0. 15 o la pasa al control $C_2$, quien a su vez la rechaza en el 7% de los casos o la pasa al control $C_3$. Finalmente, en $C_3$ se rechaza con probabilidad 0.02 o se etiqueta como correcta. Determina la probabilidad de que una componente eléctrica seleccionada al azar en la producción de dicha empresa, sea rechazada.

**45.-** El ganado ovino de una región es sometido a un control sanitario para comprobar que está libre de cierta enfermedad infecciosa. En el proceso de control cada animal es sometido a las pruebas $P_1$, $P_2$ y $P_3$ (en ese orden). Por la experiencia se sabe que en el 95% de los casos $P_1$ da resultado negativo, que 10 de cada 100 ovejas sometidas a $P_2$ dan resultado positivo y que, con probabilidad 0.03, $P_3$ da resultado positivo. Sabiendo que si una prueba da resultado positivo el animal es sacrificado, determina la probabilidad de que una oveja sometida a dicho proceso de control no sea sacrificada.

**46.-** Los hábitos de estudio de un estudiante son: si estudia una noche, con probabilidad 0.25 lo hace la noche siguiente y, si no estudia una noche, con probabilidad 0. 6 lo hace la noche siguiente. Cierto lunes por la noche lanza un dado y si sale 4 ó 6 estudia. Teniendo en cuenta sus hábitos de estudio ¿qué probabilidad hay de que estudie el miércoles siguiente por la noche?