TEMA 2. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

TEMA 2. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

❖ 2.1 Introducción

➢ La probabilidad refleja las expectativas de que un suceso determinado ocurra

➢ **Fenómeno determinista:** Se conoce con certeza el resultado del experimento

➢ **Fenómeno aleatorio:** No se puede predecir el resultado del experimento

➢ La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1 (ambos incluidos)

❖ 2.2. Conceptos básicos

◈ 2.2.1. *Espacio muestral. Sucesos*

➢ **Suceso elemental**: Cada uno de los posibles resultados, que no se pueden descomponer en otros más simples, de un experimento aleatorio

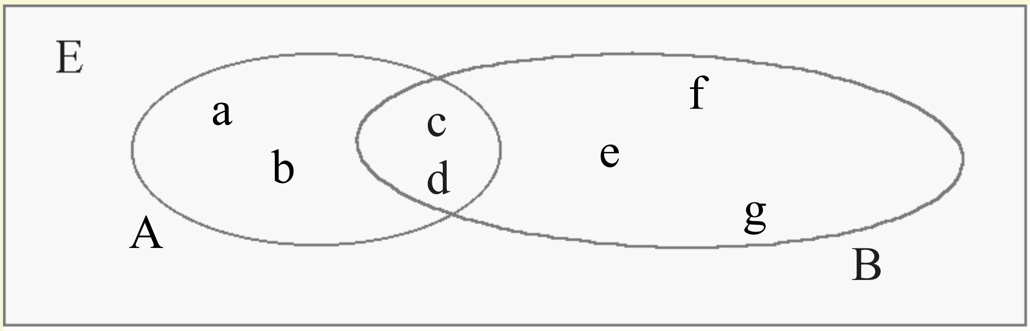
➢ **Espacio muestral, *E*:** Conjunto de los sucesos elementales

➢ **Suceso:** Subconjunto del espacio muestral

➢ **Suceso seguro:** Es el suceso formado por todos los sucesos elementales

➢ **Suceso imposible,** $\varnothing$: Es el suceso que no contiene ningún suceso elemental

◈ 2.2.2. Operaciones con sucesos

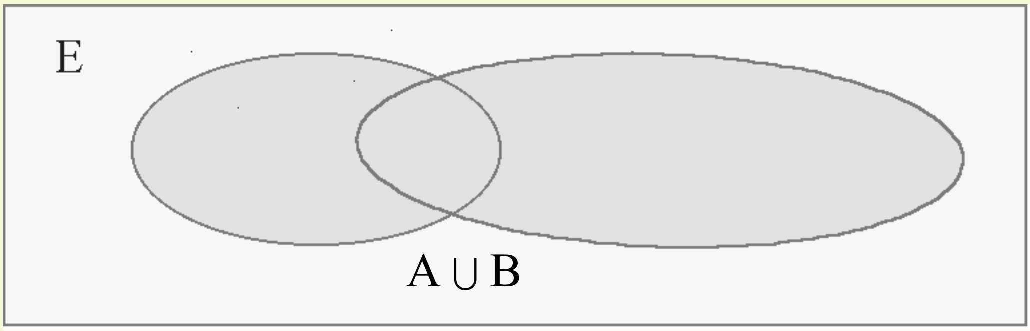


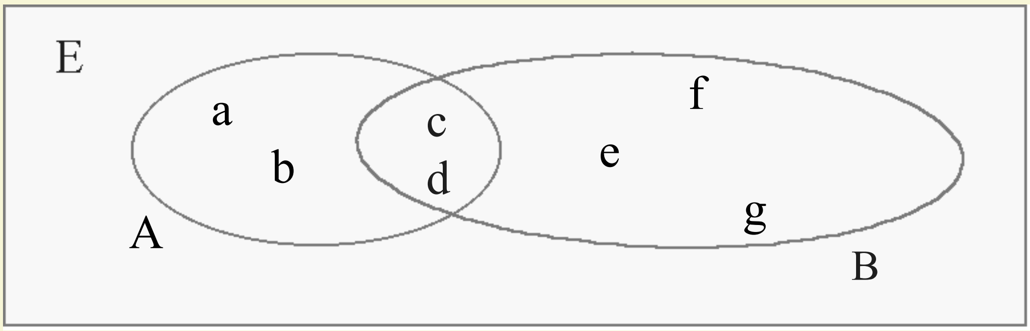
$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$

❖ Unión de sucesos

➢ $A \cup B$: Todos los sucesos elementales de A ó B

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$



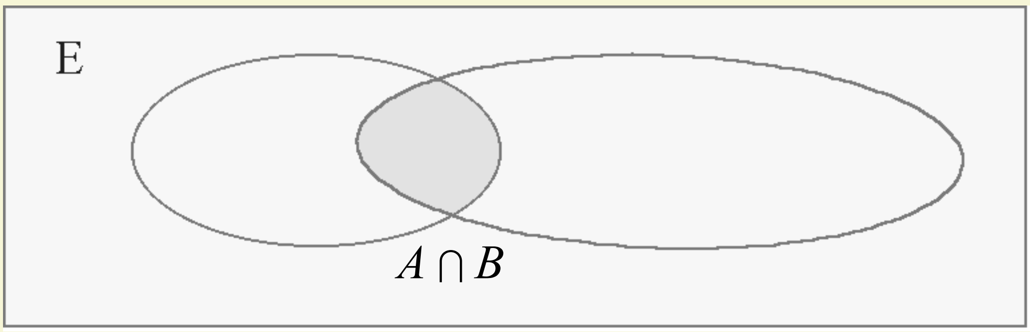


$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$

❖ Intersección de sucesos

➢ $A \cap B$: Sucesos elementales que pertenecen simultáneamente a A y a B

$$A \cap B = \{c, d\}$$

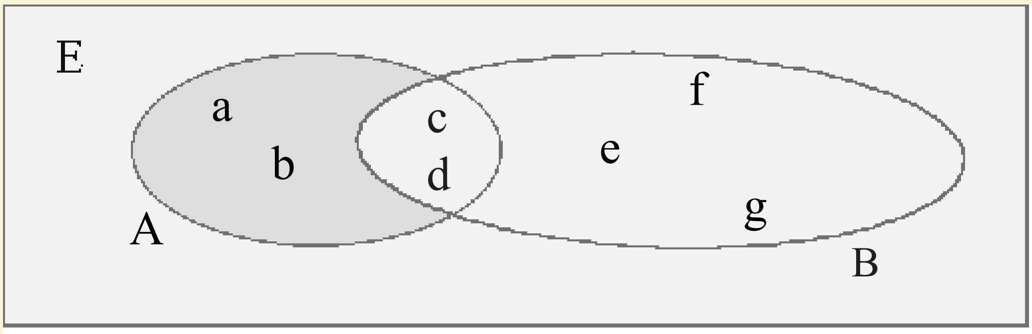


❖ Diferencia de sucesos

➢ A – B: Sucesos elementales que pertenecen al suceso A pero no al B

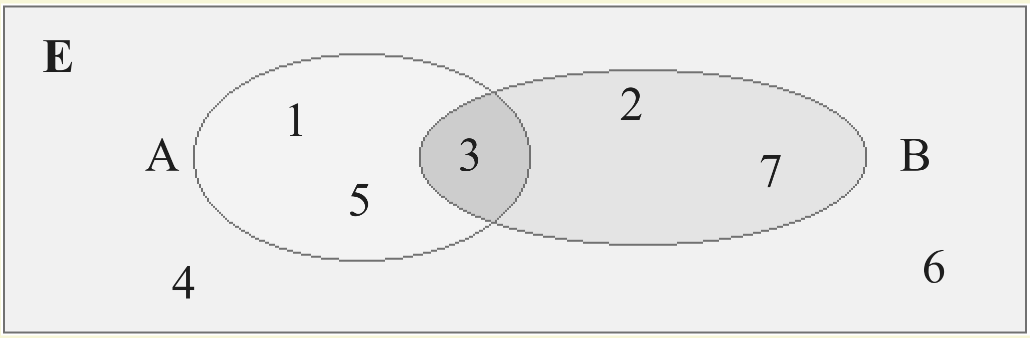
$$A = \{a, b, c, d\} \;; \quad B = \{c, d, e, f, g\}$$

$$A - B = \{a, b\}$$



♦ **Ejemplo**: Se están utilizando 7 árboles, numerados del 1 al 7, para un experimento.

- Definir el Espacio muestral: $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



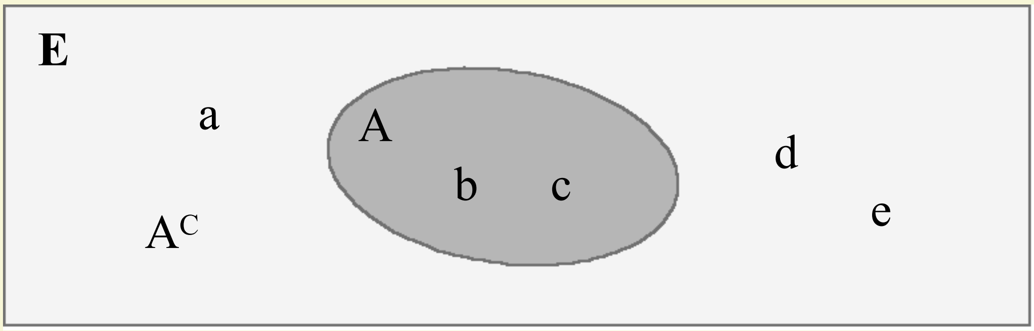
- Sean A y B los sucesos: $A = \{1,3, 5\}$, $B = \{2, 3, 7\}$
  Obtener los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; $A \cap B = \{3\}$; $A - B = \{1, 5\}$

❖ Sucesos Complementarios

➢ A^C : Es el suceso formado por todos los sucesos de *E* que no están en A

$$A^C = \boldsymbol{E} - A$$

$E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{b, c\}$, $A^C = \{a, d, e\}$



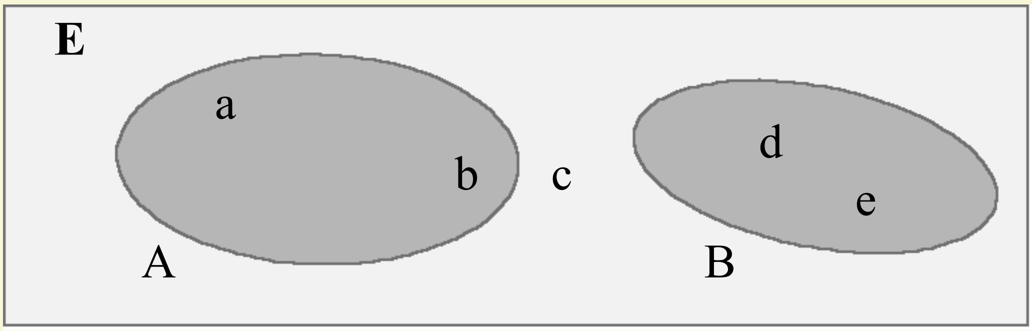
♦ **Ejemplo**: A : "Tener el grupo sanguíneo O"
A^C : "Tener el grupo sanguíneo A, B, ó AB"

✸ $\mathbf{E}^C = \emptyset$, $\emptyset^C = \mathbf{E}$

❖ Sucesos Incompatibles

➢ Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente

$$A = \{a, b\}, \quad B = \{d, e\}$$



♦ **Ejemplo**: A : "Ser un reptil", B : "Ser un león"

❖ Propiedades de la unión de sucesos

- Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$, $A \cup A^C = \mathbf{E}$

❖ Propiedades de la intersección de sucesos

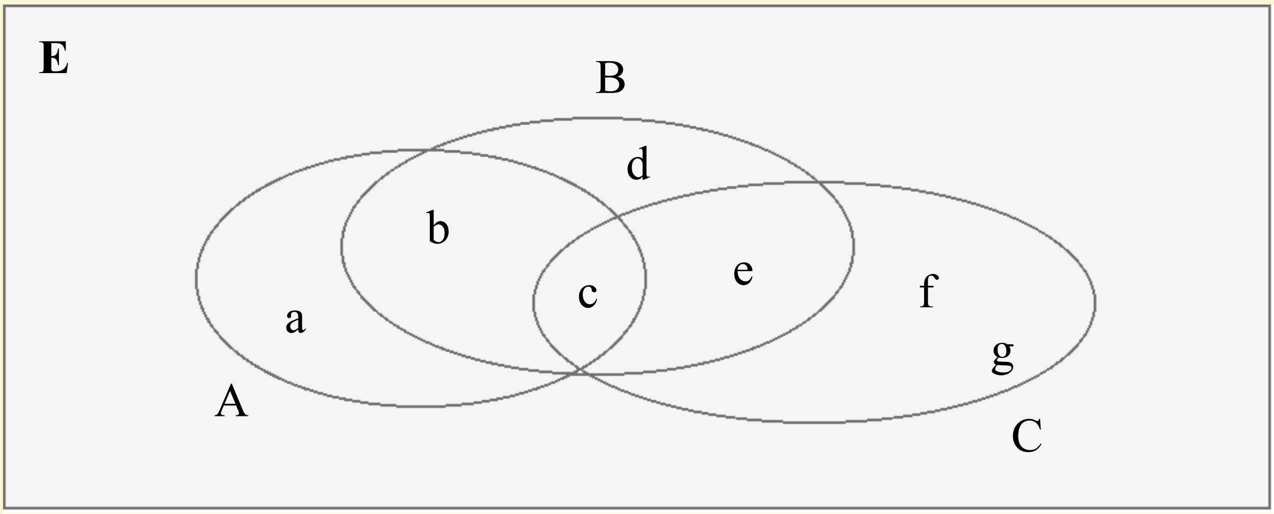
- Asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A = A$, $A \cap A^C = \emptyset$

❖ Propiedades conjuntas de la unión e intersección de sucesos

➢ Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

♦ **Ejemplo**



♦ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $C = \{c, e, f, g\}$

$A \cap (B \cup C) = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e, f, g\} = \{b, c\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{b, c\} \cup \{c\} = \{b, c\}$

❖ 2.3. Concepto de Probabilidad. Propiedades

◈ 2. 3.1. Definición clásica de la probabilidad

◈ Espacio muestral equiprobable: “Todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad de ocurrir”

En estas condiciones se define la probabilidad del suceso A como:

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{N^o\ Casos\ Favorables\ al\ Suceso\ \ A}}{\mathbf{N^o\ \ Total\ \ de\ \ Casos\ \ Posibles}} = \frac{\mathbf{C\ \ F}}{\mathbf{C\ \ P}}$$

♦ Ejemplo

✧ En una pareja, cada uno de sus miembros posee genes para ojos castaños y azules. Teniendo en cuenta que cada uno tiene la misma probabilidad de aportar un gen para ojos castaños que para ojos azules y que el gen para ojos castaños es dominante, obtener la probabilidad de que un hijo nacido de esta pareja tenga los ojos castaños.

▪ **Solución**

Gen de la madre ↓ ↓ Gen del padre

E = {C C, C A, A C, A A}

Casos favorables = {C C, C A, A C}

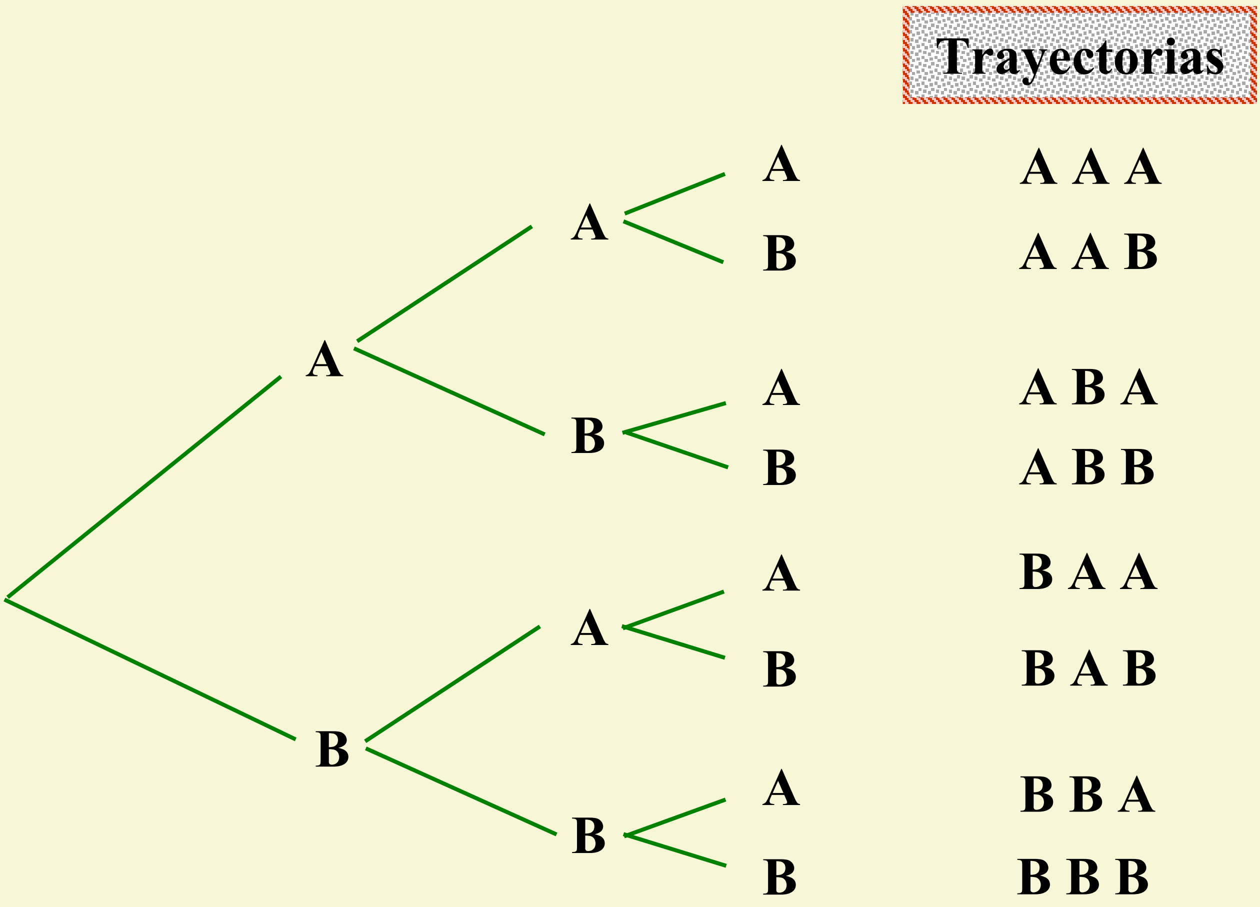
Casos posibles = {C C, C A, A C, A A}

$$P(Ojos\ Castaños) = \frac{C\,F}{C\,P} = \frac{3}{4}$$

◈ 2. 3.2. Diagramas de árbol

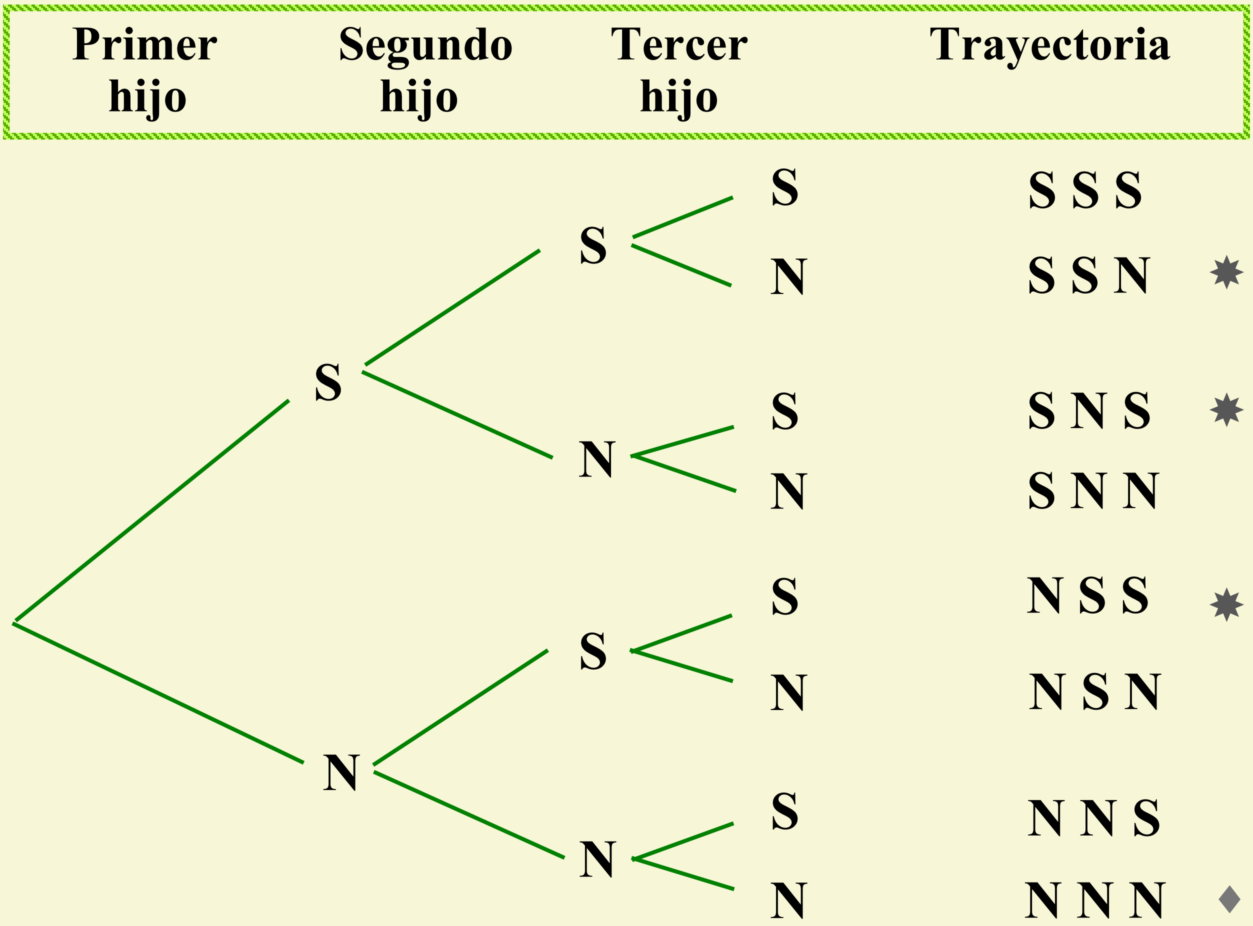
◈ El diagrama de árbol es un método para obtener los resultados posibles de un experimento cuando éste se produce en unas pocas etapas.

◈ Cada paso del experimento se representa como una ramificación del árbol.



♦ Ejemplo

✧ "Una mujer es portadora de hemofilia. Aunque la mujer no tenga la enfermedad, puede transmitirla a sus 3 hijos. Obtener las trayectorias para este experimento mediante un diagrama de árbol".



Suponiendo que es igualmente probable que se trasmita o no la enfermedad.

Obtener las probabilidades de los siguientes sucesos:

1.- Ningún hijo tenga la enfermedad, (suceso A)

2.- Dos hijos tengan la enfermedad, (suceso B)

$$P(A)=\frac{CF}{CP}=\frac{1}{8} \qquad P(B)=\frac{CF}{CP}=\frac{3}{8}$$

◈ 2.3.3. Definición axiomática de la probabilidad

- Álgebra de sucesos, β : "Es el conjunto de todos los sucesos del Espacio Muestral"
- Axiomas de la probabilidad

Consideremos una aplicación, ***P***, del álgebra de sucesos en el conjunto de los números reales.

$$\beta \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{R}$$

$$\forall A \in \beta, \quad A \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{P}(A) \in \boldsymbol{R}$$

- Esta aplicación es una probabilidad si verifica los tres axiomas siguientes:

✷ Axioma 1

$$A \in \beta, \qquad 0 \leq \boldsymbol{P}(A)$$

✷ Axioma 2

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{E}) = 1$$

✷ Axioma 3

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sucesos mutuamente incompatibles, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces se verifica

$$\boldsymbol{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$\boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(A_n)$$

♦ Ejemplo

✧ Tres caballos, A, B, y C están siendo tratados con tres métodos experimentales distintos para aumentar la velocidad con la que pueden correr. Después del tratamiento intervienen en una carrera. El caballo C tiene doble probabilidad de ganar que B, y B doble que A. Calcular las probabilidades de que gane cada uno.

Solución

$$E = \{ A, B, C \} \qquad P(A) = k \qquad P(B) = 2k \qquad P(C) = 4k$$

$$\underbrace{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)}_{\text{Ax. 3}} = \underbrace{P(E) = 1}_{\text{Ax. 2}} =$$

$$= k + 2k + 4k = 7k = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = 1/7$$

$$P(A) = 1/7 \qquad P(B) = 2/7 \qquad P(C) = 4/7$$

✷ Si suponemos que el espacio muestral es equiprobable, la definición axiomática de la probabilidad coincide con la definición clásica

✧ En el ejemplo anterior, supongamos que los tres caballos tienen la misma probabilidad de ganar

Solución:

$$\mathbf{E} = \{ A, B, C \} \qquad P(A) = P(B) = P(C) = k$$

$$P(A \cup B \cup C) \overset{\text{Ax. 3}}{=} P(A) + P(B) + P(C) = P(E) \overset{\text{Ax. 2}}{=} 1 =$$

$$= k + k + k = 3k = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = 1/3$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

◈ 2.3.4. Propiedades de la probabilidad

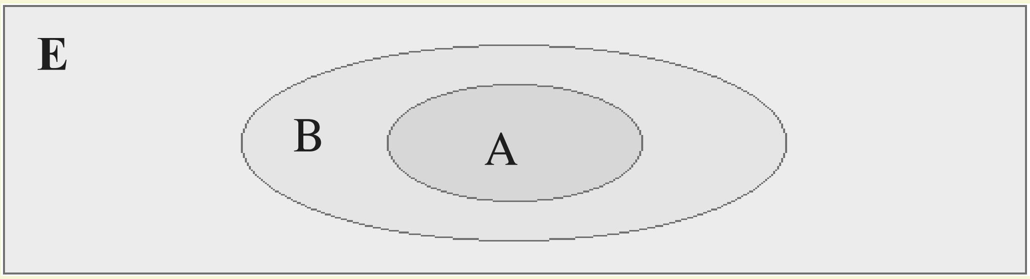
♦ 1. $\forall A \in \beta, \quad \boldsymbol{P}(A^C) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$

▪ **Ejemplo.** Se sabe que la probabilidad de curar la leucemia infantil es de 1/3. Por lo tanto, la probabilidad de que no se cure la enfermedad será de 1 – 1 / 3 = 2 /3

♦ 2. $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$

▪ **Ejemplo.** Consideramos el experimento de lanzar un dado. La probabilidad de obtener 9 en una cara es igual a cero

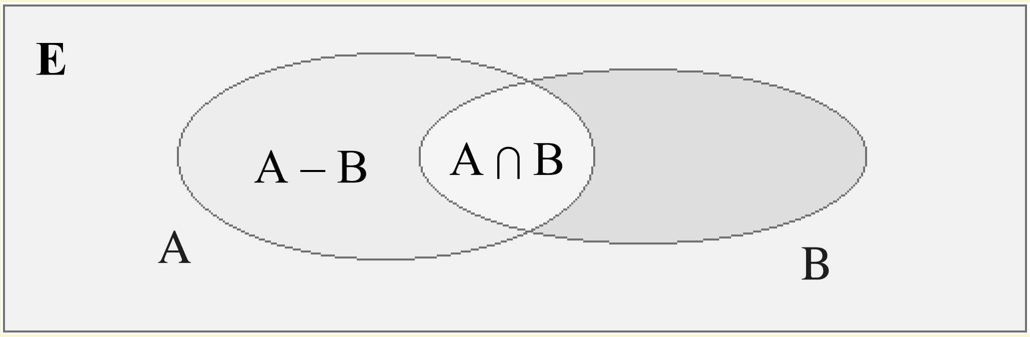
♦ 3. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{A}) \leq \boldsymbol{P}(\mathbf{B})$



▪ **Ejemplo.** En el experimento anterior, sea A el suceso obtener un numero mayor que 4, y B obtener un número mayor que 2

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CP}} = \frac{2}{6}, \qquad \boldsymbol{P}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CP}} = \frac{4}{6}$$

♦ 4. $\boldsymbol{P}(A - B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(A \cap B)$

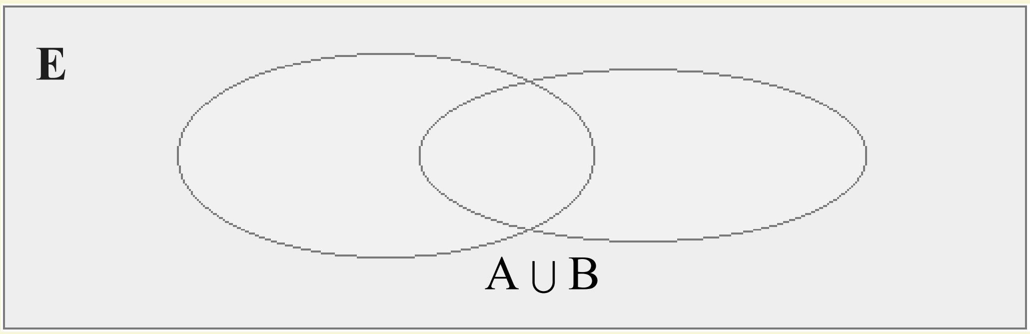


▪ **Ejemplo.** “En el experimento anterior, sea A el suceso obtener un numero menor que 5 y B el suceso obtener un numero par”

$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{2, 4, 6\},\ A - B = \{1, 3\},\ A \cap B = \{2, 4\}$

$$\boldsymbol{P}(A - B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(A \cap B) = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$$

♦ 5. $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B)$



■ **Ejemplo.** En una población el 4% de las personas son daltónicas, el 18% hipertensas y el 0.5% daltónicas e hipertensas. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea daltónica ó hipertensa?

$$A = \{\text{ Daltónico }\}, \quad B = \{\text{ Hipertenso }\}$$

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{4}{100}, \ \boldsymbol{P}(B) = \frac{18}{100}, \ \boldsymbol{P}(A \cap B) = \frac{0.5}{100}$$

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B) =$$

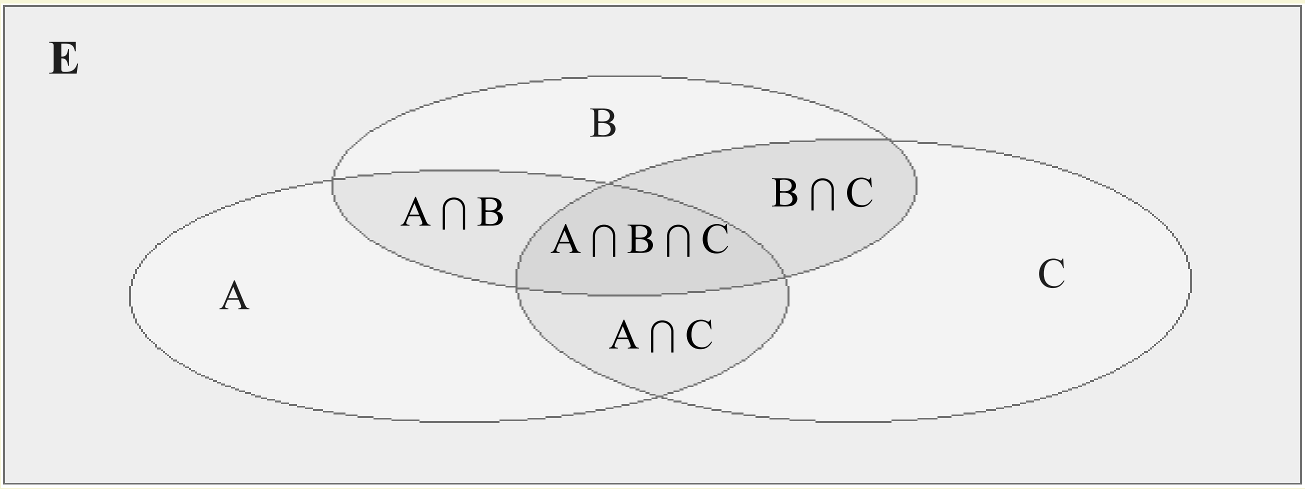
$$= \frac{4}{100} + \frac{18}{100} - \frac{0.5}{100} = 0.215$$

♦ 6.- $\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C)$

$-$

$- \boldsymbol{P}(A \cap B) - \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(B \cap C) +$

$+ \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C)$



▪ **Ejemplo.** En un parque natural se detectan tres plagas. El 25% de los árboles tienen la enfermedad A, el 20% la B y el 30% la C. El 12% la A y la B, el 10% la A y la C, el 11% la B y la C y el 5% tienen las tres enfermedades. Calcular las probabilidades siguientes:

1. Un árbol tenga alguna de las enfermedades

2. Un árbol tenga la enfermedad A pero no la B

3. Un árbol tenga la enfermedad B y C pero no la A

$\boldsymbol{P}(A) = 0.25;\quad \boldsymbol{P}(B) = 0.2;\quad \boldsymbol{P}(C) = 0.3;$

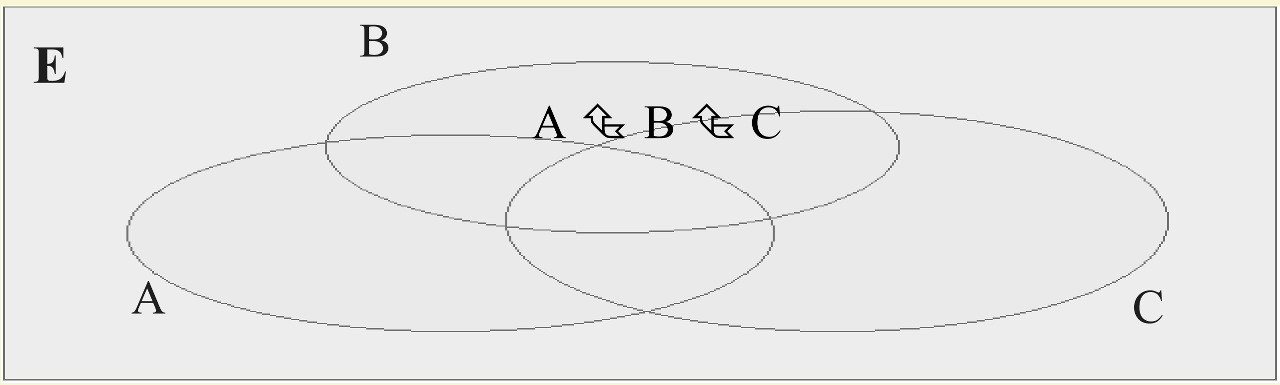
$\boldsymbol{P}(A \cap B) = 0.12;\quad \boldsymbol{P}(A \cap C) = 0.1;$

$\boldsymbol{P}(B \cap C) = 0.11;\quad \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) = 0.05;$

1. $\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(A \cap B)$

$- \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(B \cap C) + \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) =$

$= 0.25 + 0{,}2 + 0.3 - 0.12 - 0{,}1 - 0.11 + 0.05 = 0.47$



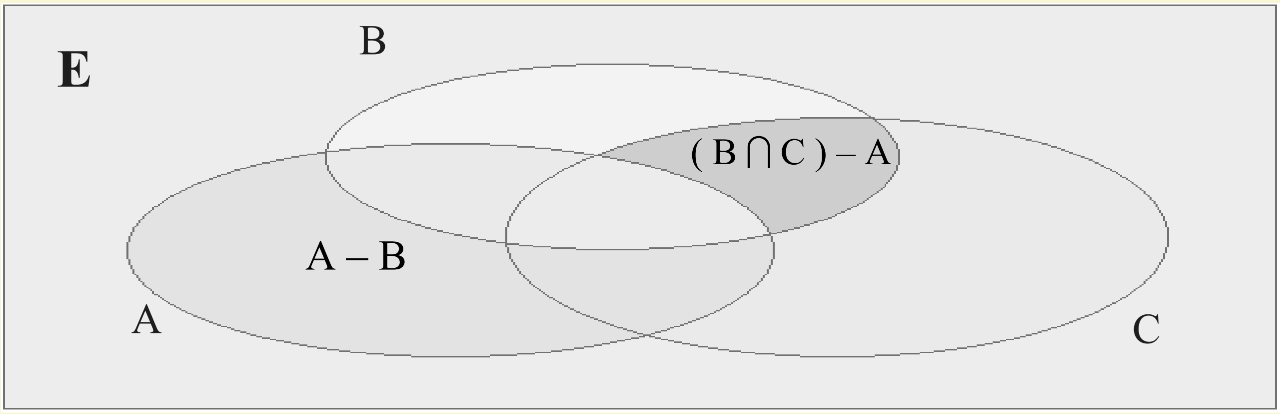
$\boldsymbol{P}(A) = 0.25$; $\boldsymbol{P}(B) = 0.2$; $\boldsymbol{P}(C) = 0.3$;

$\boldsymbol{P}(A \cap B) = 0.12$; $\boldsymbol{P}(A \cap C) = 0.1$;

$\boldsymbol{P}(B \cap C) = 0.11$; $\boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) = 0.05$;

2. Un árbol tenga la enfermedad A pero no la B

$$\boldsymbol{P}(A - B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(A \cap B) = 0.25 - 0.12 = 0.13$$



3.- Un árbol tenga la enfermedad B y C pero no la A

$$\boldsymbol{P}((B \cap C) - A) = \boldsymbol{P}(B \cap C) - \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) =$$
$$= 0.11 - 0.05 = 0.06$$

❖ 2.4. Probabilidad condicionada. Independencia de Sucesos

◈ 2.4.1. Probabilidad condicionada

➢ "Probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionado a que el suceso B haya ocurrido ya"

- Sean dos sucesos A y B $\in \beta$, con $\boldsymbol{P}(\mathrm{B}) > 0$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Si $P(\mathrm{A}) > 0$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

✷ $(\mathrm{A}/\mathrm{B})^{C} = (\mathrm{A}^{C}/\mathrm{B}) \Rightarrow \boldsymbol{P}(\mathrm{A}^{C}/\mathrm{B}) = 1 - \boldsymbol{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})$

➢ $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})\, P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})\, P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$

➢ $P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3) = P(\mathrm{A}_1)\; P(\mathrm{A}_2/\mathrm{A}_1)\; P(\mathrm{A}_3/\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$

■ **Ejemplo.** Una familia tiene tres hijos. Construir un diagrama de árbol y calcular las siguientes probabilidades:

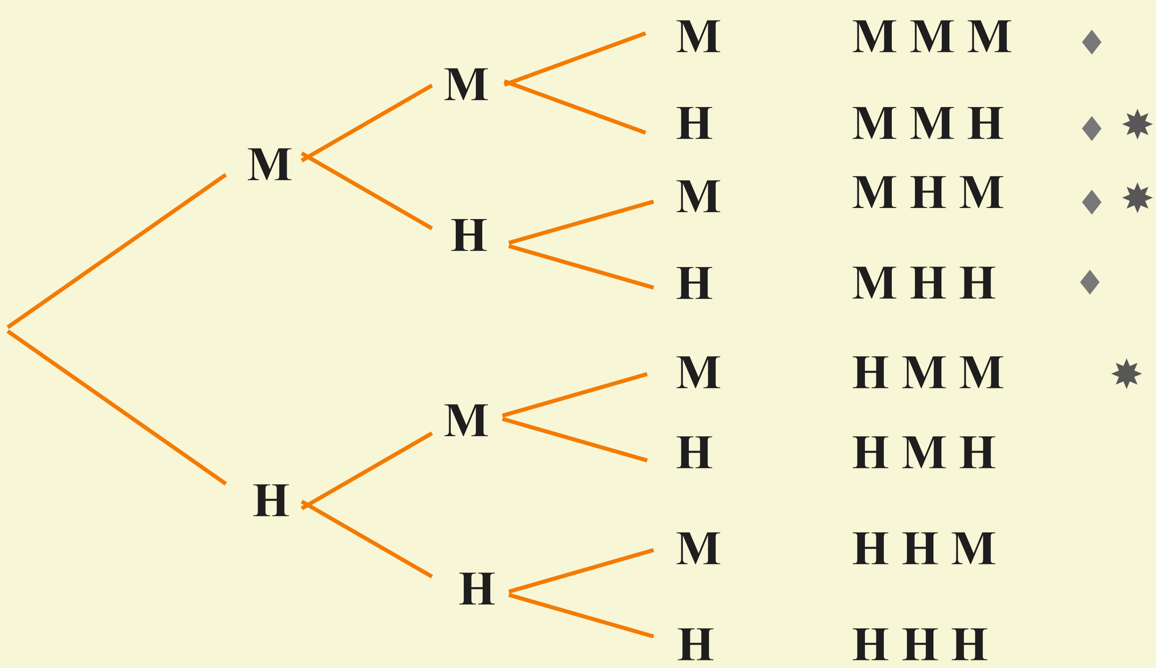
1. El primer hijo sea niña, A, (♦)

2. Exactamente dos sean niñas, B, (✷)

3. Se cumplan ambas condiciones

4. Exactamente dos sean niñas, si el primero es niña

1º hijo	2º hijo	3º hijo	Trayectoria



$$P(\mathrm{A}) = 4/8, \quad P(\mathrm{B}) = 3/8, \quad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 2/8$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

◈ 2.4.2. Independencia de sucesos

❖ El suceso A es independiente del suceso B si y sólo si se verifica:

$$\boldsymbol{P}(A / B) = \boldsymbol{P}(A)$$

Si $\boldsymbol{P}(A / B) \neq \boldsymbol{P}(A)$ el suceso A es dependiente de B

❖ La independencia es una propiedad recíproca

El suceso A es independiente del suceso B

$$\Updownarrow$$

El suceso B es independiente del suceso A

❖ Dos sucesos son independientes sii

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A)\,\boldsymbol{P}(B)$$

❖ Si los sucesos A y B son independientes, se verifica:

- Los sucesos A y B^C son independientes
- Los sucesos A^C y B son independientes
- Los sucesos A^C y B^C son independientes

❖ Decimos que n sucesos son independientes si se verifica:

$$\boldsymbol{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \boldsymbol{P}(A_1)\,\boldsymbol{P}(A_2)\ldots\boldsymbol{P}(A_n)$$

▪ **Ejemplo.** Se analizan muestras de agua para detectar plomo y mercurio. El 38% de las muestras presentan niveles tóxicos de plomo o mercurio, el 32% de plomo y el 10% de ambos metales.

a. ¿Son independientes los sucesos: "Nivel tóxico de plomo" y "Nivél tóxico de mercurio"

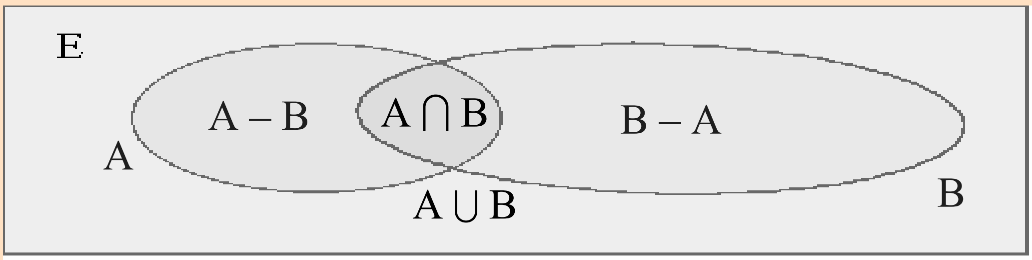
b. Calcular las probabilidades de que una muestra tenga:

1. Niveles tóxicos de mercurio si tiene niveles tóxicos de plomo

2. Niveles tóxicos solamente de plomo

A : "Nivel tóxico plomo", B: "Nivel tóxico mercurio"

$\boldsymbol{P}(A \cup B) = 0.38;\quad \boldsymbol{P}(A) = 0.32;\quad \boldsymbol{P}(A \cap B) = 0.10$



a.

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A \cup B) - \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(A \cap B) =$$

$$= 0.38 - 0.32 + 0.10 = 0.16$$

$$\boldsymbol{P}(A)\,\boldsymbol{P}(B) = 0.32 \times 0.16 = 0.051 \neq 0.10 = \boldsymbol{P}(A \cap B)$$

$\Rightarrow$ Los sucesos A y B no son independientes

b 1.

$$\boldsymbol{P}(B / A) = \boldsymbol{P}(A \cap B) / \boldsymbol{P}(A) = 0.10 / 0.32 = 0.3125$$

b 2.

$$\boldsymbol{P}(A - B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(A \cap B) = 0.32 - 0.10 = 0.22$$

▪ **Ejemplo.** "Se están estudiando tres mutaciones no relacionadas, A, B y C, en un grupo de monos. La probabilidad de tener la mutación A es 0.13, la B es 0.11 y la C es 0.14. Calcular las probabilidades:

1. Un mono no tenga ninguna de las mutaciones

2. Un mono tenga alguna de las mutaciones

3. Un mono tenga la mutación A y C, pero no la B

$$\boldsymbol{P}(A) = 0.13; \quad \boldsymbol{P}(B) = 0.11; \quad \boldsymbol{P}(C) = 0.14$$

Los sucesos A, B y C son independientes

1.

$$\boldsymbol{P}(A^C \cap B^C \cap C^C) = \boldsymbol{P}(A^C)\,\boldsymbol{P}(B^C)\,\boldsymbol{P}(C^C) =$$
$$= (1 - \boldsymbol{P}(A))\,(1 - \boldsymbol{P}(B))\,(1 - \boldsymbol{P}(C)) =$$
$$= 0.87 \times 0.89 \times 0.86 = 0.665898$$

2.

$$\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(A \cap B) - \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(B \cap C) + \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C) =$$
$$= 0.13 + 0.11 + 0.14 - 0.13 \times 0.11 - 0.13 \times 0.14 - 0.11 \times 0.14 + 0.13 \times 0.11 \times 0.14 = 0.334102$$

◈ $\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \boldsymbol{P}(A^C \cap B^C \cap C^C) = 1 - 0.66589$

3.

$$\boldsymbol{P}(A \cap B^C \cap C) = \boldsymbol{P}(A)\,\boldsymbol{P}(B^C)\,\boldsymbol{P}(C) =$$
$$= \boldsymbol{P}(A)\,(1 - \boldsymbol{P}(B))\,\boldsymbol{P}(C) =$$
$$= 0.13 \times 0.89 \times 0.14 = 0.016198$$

❖ 2.5. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes

◈ 2.5.1. Teorema de la probabilidad total

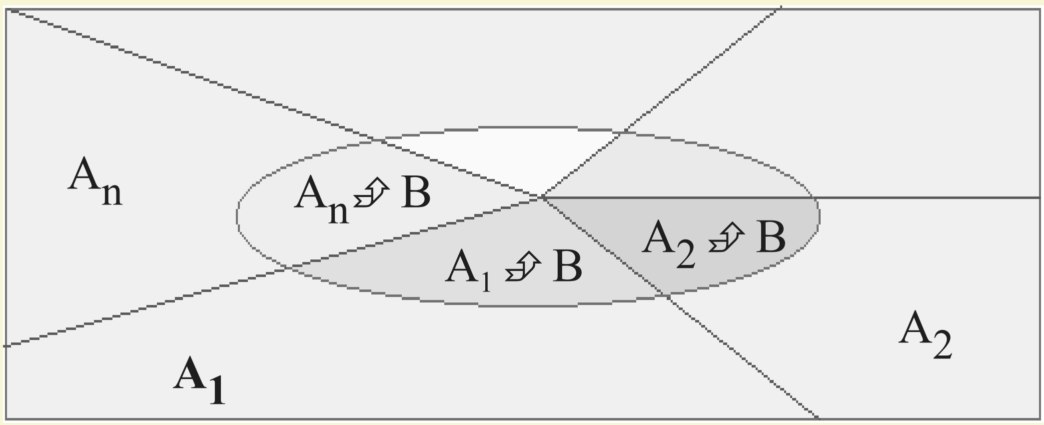
✧ Sean los sucesos A_1, A_2, ... ,A_n, que verifican:

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \theta \quad si \quad i \neq j \\ A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E \end{cases}$$

▪ Los sucesos A_i, para i = 1, … , n son incompatibles dos a dos y exhaustivos

✧ Sea un suceso B, con P (B) > 0

✧ Se conocen: $P(A_i) \;\; y \;\; P(B / A_i), \;\; i = 1,...,n$



❑ En las condiciones anteriores, este teorema nos proporciona la probabilidad total de que ocurra el suceso B:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)}$$

◈ 2.5.2. Teorema Bayes

✧ Sean los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que verifican:

$$\left\langle \begin{array}{l} A_i \cap A_j = \theta \quad si \quad i \neq j \\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E \end{array} \right.$$

- Los sucesos A_i, para i = 1, … ,n, son incompatibles dos a dos y exhaustivos

✧ Sea un suceso B, con P (B) > 0

✧ Se conocen: $P(A_i)$ y $P(B / A_i)$, $i = 1, \ldots, n$

❑ El Teorema de Bayes nos expresa la probabilidad de que ocurra un suceso determinado, A_j, condicionado a que el suceso B ya ha ocurrido

$$P\left(A_j / B\right) = \frac{P\left(A_j \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(A_j\right) P\left(B / A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) P\left(B / A_i\right)}$$

➢ Las probabilidades P(A_j) se designan probabilidades a "*priori*", o probabilidades de las causas. Las probabilidades P (A_j / B) se designan probabilidades a "*posteriori*", si el suceso B ya ha ocurrido, probabilidad de que sea debido a la causa

▪ **Ejemplo.** Una empresa farmacéutica tiene tres delegaciones, Madrid, Barcelona y Granada. De un determinado fármaco se produce el 45% en la delegación de Madrid, el 30% en Barcelona, y el 25% en Granada. Del total de los fármacos, son defectuosos el 5% de los producidos en Madrid, el 3% en Barcelona y el 4% en Granada. Calcular:

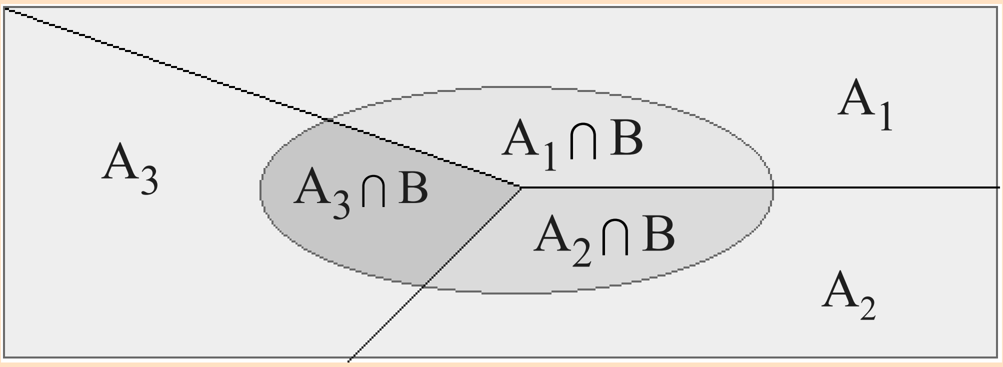
1. Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso

2. Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Granada?

A_1 : "Producido Madrid", A_2 : "Producido Barcelona"
A_3 : "Producido Granada", B : "Defectuoso"

$$P(A_1) = 0.45; \quad P(A_2) = 0.30; \quad P(A_3) = 0.25$$

$$P(B/A_1) = 0.05; \quad P(B/A_2) = 0.03; \quad P(B/A_3) = 0.04$$



1.

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

$$= 0.45 \times 0.05 + 0.30 \times 0.03 + 0.25 \times 0.04 = 0.0415$$

2.

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.04}{0.0415} = 0.241$$

✧ **Ejemplo.** En una población el 51% de las personas son mujeres, el 18% tienen la tensión alta y el 10% ambas cosas. Obtener:

1. Probabilidad de que una persona tenga la tensión alta si es mujer

2. Probabilidad de ser hombre si se tiene la tensión alta

3. Probabilidad de ser mujer si no se tiene la tensión alta

A : "Ser Mujer", B : "Tener la tensión alta"

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{A}) = 0.51;\ \boldsymbol{P}(\mathrm{B}) = 0.18;\ \boldsymbol{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.10$$

1. $$\boldsymbol{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{\boldsymbol{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\boldsymbol{P}(\mathrm{A})} = \frac{0.10}{0.51} = 0.19$$

2. $$\boldsymbol{P}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{C}}/\mathrm{B}\right) = 1 - \boldsymbol{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = 1 - 0.555 = 0.445$$

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{\boldsymbol{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\boldsymbol{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.10}{0.18} = 0.555$$

3. $$\boldsymbol{P}\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}^{\mathrm{C}}\right) = \frac{\boldsymbol{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^{\mathrm{C}}\right)}{\boldsymbol{P}\left(\mathrm{B}^{\mathrm{C}}\right)} = \frac{0.4131}{0.82} = 0.5037$$

$$\boldsymbol{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^{\mathrm{C}}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\ \mathrm{P}\left(\mathrm{B}^{\mathrm{C}}/\mathrm{A}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\left(1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})\right) =$$

$$= 0.51 \times (\ 1 - 0.19\ ) = 0.4131$$