APÉNDICE A

Algebra matricial

El estudio de la econometría requiere cierta familiaridad con el álgebra matricial. La teoría de matrices simplifica la descripción, desarrollo y aplicación de los métodos econométricos. En este capítulo, se resumen algunos conceptos fundamentales del álgebra matricial que se usarán a lo largo del curso.

A.1. Matrices

Definición 103. *Una matriz* $\mathbf{A}$ *de orden* $m \times n$ *es un conjunto de elementos* a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ *dispuestos en* m *filas y* n *columnas*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas en negrita, $\mathbf{A}$. El elemento de la fila i-ésima y de la columna j-ésima se representa por una letra minúscula con un par de subíndices, a_{ij}. De aquí, un modo abreviado de escribir una matriz es $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ para $i = 1, 2 \ldots, m$ y $j = 1, 2 \ldots, n$. El orden o dimensión de la matriz $m \times n$ nos indica el número de filas y de columnas. La matriz $\mathbf{A}$ se denomina cuadrada cuando $m = n$ y rectangular si $m \neq n$.

Los elementos de una matriz pueden ser números de cualquier clase. Se consideran aquí matrices de números reales, $a_{ij} \in \Re$.

Ejemplo 28. *La matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz rectangular de orden 3×4*; el elemento de la fila 3 y columna 3 es 11.*

Definición 104. *La traspuesta de la matriz* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *de orden* $m \times n$ *es una matriz* $\mathbf{A}' = [a_{ji}]$ *de orden* $n \times m$ *cuyas filas (columnas) son las columnas (filas) de la matriz* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 29. *La traspuesta de la matriz* $\mathbf{A}$ *del ejemplo 1 es*

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2. Vectores

Definición 105. *Un vector columna es una matriz de orden* $m \times 1$*, es decir, una matriz que sólo tiene una columna*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Un vector columna se denota por una letra minúscula en negrilla y se escribe de forma abreviada como $\mathbf{a} = [a_i]$. Cada elemento del vector tiene un subíndice que indica la posición en la columna.

Un vector fila es una matriz de orden $1 \times m$, es decir, una matriz que sólo tiene una fila

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix}$$

La traspuesta de un vector columna $\mathbf{a} = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_m)'$ es un vector fila $\mathbf{a}' = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_m)$. Observe que la notación $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_m)'$ indica la traspuesta un vector fila (que es un vector columna) y se usa para escribir un vector columna en una línea de texto.

Definición 106. *Sean* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)'$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)'$ *dos vectores columna del mismo orden* $m \times 1$*, su* **producto escalar** *se define como*

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

que es la suma de los productos de cada elemento de $\mathbf{a}$ *por el correspondiente elemento de* $\mathbf{b}$*.*

Definición 107. *La norma de un vector* $\mathbf{x}$ *se define como*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$$

siendo el vector normalizado $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$*.*

Definición 108. *Dos vectores* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)'$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)'$ *son ortogonales,* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$*, si su producto escalar es cero*

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0$$

Ejercicio 11. *Sea* $\mathbf{i} = (1\,1\, \ldots\, 1)'$ *un vector* $m \times 1$ *de unos. Calcule el producto escalar* $\mathbf{i}'\mathbf{i}$*.*

Ejercicio 12. *Sean* $\mathbf{i} = (1, \ldots, 1)'$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)'$ *de orden* $m \times 1$*. Calcule el producto escalar* $\mathbf{i}'\mathbf{y}$*.*

Ejercicio 13. *Demuestre que la media de las observaciones* $y_1, \ldots, y_m$ *puede expresarse como* $\mathbf{i}'\mathbf{y}/\mathbf{i}'\mathbf{i}$.

A.3. Operaciones básicas con matrices

1. **Igualdad de matrices** Dos matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ del mismo orden $m \times n$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, 2 \ldots, m$ y $j = 1, 2 \ldots, n$.
2. **Suma de matrices** La suma de dos matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ del mismo orden $m \times n$ es una matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}] =$ de orden $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i = 1, 2 \ldots, m$ y $j = 1, 2 \ldots, n$.

   La suma de matrices cumple las propiedades:
   a) Conmutativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
   b) Asociativa: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
   c) Existencia de elemento neutro o matriz nula $\mathbf{0} = [0]$: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
   d) Existencia de matriz opuesta: $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

   Ejemplo 30. *La suma de las matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *es*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 11 & 2 & 9 \\ 5 & 8 & 8 & 1 \\ 6 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 9 & 13 \\ 10 & 12 & 10 & 6 \\ 7 & 11 & 19 & 11 \end{pmatrix}$$

3. **Multiplicación por un escalar** El producto de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ por un escalar λ es una matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$, esto es, se multiplican todos los elementos de la matriz por el escalar.

   Ejemplo 31. *La multiplicación de la matriz* $\mathbf{A}$ *por 2 es*

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 8 \\ 10 & 8 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 22 & 2 \end{pmatrix}$$

4. **Resta de matrices** La resta de dos matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ del mismo orden $m \times n$ es una matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}] =$ de orden $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para todo $i = 1, 2 \ldots, m$ y $j = 1, 2 \ldots, n$. La operación resta puede definirse también a partir de la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar.
5. **Multiplicación de matrices** Sean $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ dos matrices de órdenes $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente (el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$). El producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, es una matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ de orden $m \times p$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ para $i = 1, 2 \ldots, m$ y $j = 1, 2 \ldots, n$. Observe que el elemento c_{ij} es el producto escalar de la fila i-ésima de $\mathbf{A}$ por la columna j-ésima de $\mathbf{B}$.

   La multiplicación de matrices cumple las propiedades:
   a) Asociativa: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
   b) Distributiva: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

   Observación 80. *La multiplicación de matrices no cumple la propiedad conmutativa:* $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Ejemplo 32. *El producto de las matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}'$ *es*

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 11 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 8 \\ 9 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 & 130 & 182 \\ 128 & 78 & 136 \\ 49 & 102 & 114 \end{pmatrix}$$

6. **Trasposición de matrices** La transposición de matrices, ya definida, cumples las propiedades:
   a) Reflexiva: $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$,
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$, la traspuesta de la suma de dos matrices es la suma de las matrices traspuestas,
   c) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$, la traspuesta del producto de dos matrices es el producto de las traspuestas en orden invertido. Esta propiedad puede extenderse al producto de tres o más matrices: $(\mathbf{ABC})' = (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))' = (\mathbf{BC})'\mathbf{A}' = \mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$.
7. **Traza de una matriz** La traza de una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden $m \times m$ es la suma de los elementos de la diagonal principal

$$tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm} = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

   Es claro que se cumplen las siguientes propiedades:
   a) $tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}')$
   b) $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
   c) $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$

Ejemplo 33. *La traza de la matriz* $\mathbf{F}$ *es*

$$tr(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 147 & 130 & 182 \\ 128 & 78 & 136 \\ 49 & 102 & 114 \end{pmatrix} = 147 + 78 + 114 = 339$$

A.4. Determinantes

El determinante de un escalar o, lo que es lo mismo, de una matriz de orden 1×1 es el propio escalar. El determinante de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden 2×2 es

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

que es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos situados fuera de la diagonal. El determinante de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden 3×3 es

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

que es la suma de todos los productos posibles de tres elementos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ tal que (i) cada producto tiene un único elemento de cada fila y columna, y (ii) el signo de cada producto es $(-1)^p$ donde p el número de transposiciones requeridas para cambiar

(j_1, j_2, j_3) en $(1,2,3)$. Por ejemplo, en el producto $a_{12}a_{23}a_{31}$ se requieren dos transposiciones para pasar de $(2,3,1)$ a $(1,2,3)$, mientras que en el producto $a_{13}a_{22}a_{31}$ se requiere una transposición para pasar de $(3,2,1)$ a $(1,2,3)$.

En general, el determinante de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden $m \times m$ es la suma de todos los posibles productos de m elementos de $\mathbf{A}$, $a_{1j_1}a_{1j_2}\dots a_{mj_m}$, tal que (i) cada producto contiene un sólo elemento de cada fila y columna, y (ii) el signo de cada producto es $(-1)^p$ donde p es el número de transposiciones requeridas para pasar de $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ a $(1, 2, \dots, m)$:

$$|A| = \sum_{k=1}^{m!} (-1)^{p_k} (a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{mj_m})_k$$

Definición 109. *Sea* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *una matriz de orden* $m \times m$*, y sea* $\mathbf{M}_{ij} = [m_{ij}]$ *la submatriz de orden* $m-1 \times m-1$ *que se obtiene de eliminar la fila* i *y la columna* j *de* $\mathbf{A}$*. Se denomina (1) menor del elemento* a_{ij} *al determinante de la matriz* $\mathbf{M}_{ij}$*, y (2) cofactor del elemento* a_{ij} *a la cantidad* $(-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$

El determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ puede calcularse por expansión de sus menores

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$$

Algunas propiedades de los determinantes son las siguientes

1. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas del mismo orden.
2. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
3. $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda^m|\mathbf{A}|$
4. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$

Definición 110. *Se dice que una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *es singular si su determinante es cero,* $|\mathbf{A}| = 0$*, y no singular si su determinante es distinto de cero,* $|\mathbf{A}| \neq 0$*.*

Ejemplo 34. *Sea la matriz* $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El determiante de $\mathbf{G}$ *es*

$$|\mathbf{G}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - 0 \times (-2) + 2 \times 0 = -6$$

A.5. Matriz inversa

Definición 111. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de orden* $m \times m$*. Si existe una matriz* $\mathbf{B}$ *tal que* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$*, entonces* $\mathbf{B}$ *se denota por* $\mathbf{A}^{-1}$ *y se denomina matriz inversa.*

La inversa de una matriz $\mathbf{A}$ se calcula del siguiente modo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj(\mathbf{A})$$

donde $adj(\mathbf{A})$ es la matriz adjunta o traspuesta de la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$. Vemos que la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

Algunas propiedades de la matriz inversa son las siguientes:

1. La matriz inversa es única.
2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, la inversa de la inversa es la matriz original.
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, la inversa del producto es el producto de las inversas en orden inverso.
4. $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$, la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa, esto es, el operador transposición y el operador inversión son intercambiables.

Definición 112. *Una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *se denomina ortogonal si* $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$*, esto es, si* $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$.

Ejemplo 35. *La inversa de la matriz* $\mathbf{G}$ *es*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -7 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A.6. Rango de una matriz

Definición 113. *El rango de una matriz* $\mathbf{A}$ *es el número de columnas (filas) linealmente independientes.*

Definición 114. *El conjunto de vectores* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *de orden* m *son linealmente dependientes si el vector nulo puede obtenerse como una combinación lineal de ellos*

$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \Re$ *son distintos de cero.*

Definición 115. *El conjunto de vectores* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *de orden* m *son linealmente independientes si el vector nulo no puede obtenerse como una combinación lineal de ellos*

$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \Re$ *son distintos de cero.*

El rango de una matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ es el orden del mayor determinante no nulo que puede extraerse de $\mathbf{A}$. Se dice que la matriz $\mathbf{A}$ tiene rango pleno o completo cuando $rang(A) = \text{mín}(m, n)$.

El rango de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $rang(A \times B) \leq min\{rang(A), rang(B)\}$
2. Si A es no singular, $rang(A \times B) = rang(B)$
3. $rang(A \times A') = rang(A \times A') = rang(A)$

A.7. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n =& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n =& b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n =& b_m \end{aligned}\right\}$$

en donde a_{ij} y $b_i \in \Re$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) son coeficientes conocidos, y x_i ($i = 1, \dots, m$) son las incógnitas. El sistema puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o de forma abreviada

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Definición 116. *Un sistema de ecuaciones lineales se denomina sistema de Cramer si la matriz* $\mathbf{A}$ *es cuadrada,* $m = n$, *y no singular,* $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Un sistema de Cramer tiene solución única que viene dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Ejemplo 36. *El sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} 12x_1 + 20x_2 =& 388 \\ 4x_1 + 17x_2 =& 212 \end{aligned}$$

puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 388 \\ 212 \end{pmatrix}$$

siendo la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 388 \\ 212 \end{pmatrix} = \frac{1}{124} \begin{pmatrix} 17 & -20 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 388 \\ 212 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A.8. Matrices cuadradas especiales

1. **Matriz diagonal**: es una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden $m \times m$ cuyos elementos situados fuera de la diagonal principal son iguales a cero, $a_{ij} = 0 \, \forall i \neq j$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Escribimos una matriz diagonal como $\mathbf{A} = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$.

2. **Matriz identidad**: es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a uno, se denota por $\mathbf{I}_m$.

$$\mathbf{I}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Matriz escalar**: es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a $\lambda \in \Re$. Veremos que una matriz escalar es el producto de un número λ por una matriz identidad, $\lambda \mathbf{I}_m$.
4. **Matriz triangular inferior**: es una matriz cuadrada cuyos elementos por encima de la diagonal principal son todos nulos, $a_{ij} = 0 \; \forall i < j$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

5. **Matriz nula**: es una matriz (cuadrada o rectangular) cuyos elementos son todos iguales a cero, se denota por $\mathbf{0}$.
6. **Matriz simétrica**: es una matriz cuadrada de orden m $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ cuyos elementos satisfacen la condición $a_{ij} = a_{ji}$. Una matriz simétrica es igual a su traspuesta, $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$.
7. **Matriz idempotente**: es una matriz cuadrada que cumple $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \mathbf{A}$.
8. **Matriz ortogonal**: es una matriz cuadrada que cumple $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}_m$

A.9. Autovalores y autovectores de una matriz

DEFINICIÓN 117. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de orden* m*. La ecuación característica de* $\mathbf{A}$ *es*

$$|A - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

que es una ecuación polinomial en λ *de orden* m

$$\lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda + \alpha_m = 0$$

EJEMPLO 37. *La ecuación característica de la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

DEFINICIÓN 118. *Las raíces* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *de la ecuación característica* $|A - \lambda \mathbf{I}| = 0$ *se denominan autovalores, valores propios, raíces características o raíces latentes de la matriz* $\mathbf{A}$*.*

PROPOSICIÓN 127. *Los autovalores de una matriz simétrica pertenecen al cuerpo de los números reales.*

Ejemplo 38. *Los autovalores de la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

son las raíces $\lambda_1 = -1$ *y* $\lambda_2 = 3$ *de la ecuación característica* $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

Definición 119. *Se llama autovector, vector propio, vector característico o vector latente de la matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *a todo vector* $\mathbf{x}$ *de orden* $m \times 1$*, distinto del vector nulo, que cumple*

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

Observación 81. *Si* $\mathbf{x}$ *es un autovector de* $\mathbf{A}$ *y* $c \in \Re$*, entonces* $c\mathbf{x}$ *también es un autovector de* $\mathbf{A}$*.*

Ejemplo 39. *El autovector asociado al autovalor* $\lambda_1 = -1$ *cumple*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$$

De aquí,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{12} \end{pmatrix}$$

y el autovector normalizado es

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Proposición 128. *Los autovectores* $\mathbf{x}_i$ *y* $\mathbf{x}_j$ *asociados a autovalores* λ_i *y* λ_j *distintos son ortogonales.*

Proposición 129. *Se cumplen las siguientes relaciones*

1. $tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Ejercicio 14. *Demostrar que los autovalores de una matriz idempotente* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ *son iguales a 1 ó 0.*

A.10. Formas cuadráticas

Definición 120. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica de orden* $n \times n$ *y sea* $\mathbf{x}$ *un vector de orden* $n \times 1$*. El producto*

$$\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

se denomina forma cuadrática en $\mathbf{x}$*.*

De acuerdo con su signo, una forma cuadrática $\mathbf{x}'\mathbf{Ax}$ puede ser:

1. Definida positiva: $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
2. Semidefinida positiva: $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
3. Definida negativa: $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
4. Semidefinida negativa: $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
5. No definida, su signo cambia con el vector $\mathbf{x}$.

La anterior clasificación puede hacerse en términos de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$. Si todos los autovalores son positivos, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ es definida positiva; si algunos autovalores son positivos y otros iguales a cero, semidefinida positiva; si todos son negativos, definida negativa; si algunos son negativos y otros iguales a cero, semidefinida negativa; en cualquier otro caso, no definida.

PROPOSICIÓN 130. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz de orden* $m \times n$*, la forma cuadrática* $\mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es definida positiva si* $|\mathbf{A}'\mathbf{A}| \neq 0$ *y semidefinida positiva si* $|\mathbf{A}'\mathbf{A}| = 0$*.*

DEMOSTRACIÓN. Define el vector columna $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ de orden $m \times 1$, entonces el producto esclar

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \geq 0$$

El vector $\mathbf{y}$ será igual al vector nulo cuando las columnas de $\mathbf{A}$ sean vectores linealmente dependientes

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

□

A.11. Diagonalización de matrices

DEFINICIÓN 121. *Una matriz cuadrada* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *de orden* m *es diagonalizable cuando existe una matriz cuadrada* $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ *de orden* m *no singular tal que*

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

donde $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ *es una matriz diagonal de orden* m*.*

PROPOSICIÓN 131. *Si una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *de orden* m *es diagonalizable, entonces los elementos de la diagonal principal de* $\mathbf{D}$ *son los autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *de* $\mathbf{A}$*, y las columnas* $\mathbf{P}$*, son los correspondientes autovectores* $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$*.*

PROPOSICIÓN 132. *Una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *con autovalores distintos es siempre diagonalizable.*

PROPOSICIÓN 133. *Si la matriz* $\mathbf{A}$ *es simétrica,* $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$*, entonces* $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$ *y* $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}'$*.*

DEFINICIÓN 122. *La descomposición espectral de una matriz simétrica* $\mathbf{A}$ *de orden* m *es*

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i'$$

DEFINICIÓN 123. *La raíz cuadrada de una matriz definida positiva* $\mathbf{A}$ *de orden* m *es*

$$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{P}' = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i}\mathbf{p}_i\mathbf{p}_i'$$

en donde $\mathbf{D} = \{\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_m^{1/2}\}$*.*

DEFINICIÓN 124. *La descomposición de Cholesky de una matriz definida positiva* $\mathbf{A}$ *de orden* m *es*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$$

en donde $\mathbf{T} =$ *es una matriz triangular superior.*

Los elementos de la primera columna de la matriz $\mathbf{T}$ pueden obtenerse mediante las relaciones

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}$$
$$t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad j = 2, \ldots, m$$

y los elementos de las siguientes columnas

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad i = 2, \ldots, m$$
$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad i = 2, \ldots, m; \; j = i+1, \ldots, m$$

A.12. Matrices particionadas

A veces es conveniente agrupar los elementos de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$ en dos o más submatrices. De este modo, podemos escribir $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ $(i = 1, \ldots, h; \; j = 1, \ldots, k)$, donde $\mathbf{A}_{ij}$ es una submatriz de orden $m_i \times n_j$ que resulta de suprimir $m - m_i$ filas y $n - n_j$ columnas de la matriz $\mathbf{A}$, con $m_1 + \cdots + m_h = m$ y $n_1 + \cdots + n_k = n$. La matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ se denomina matriz particionada.

Ejemplo 40. *La matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & 10 \\ 7 & 7 & 6 & 9 & 5 \\ 8 & 8 & 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

puede particionarse en las submatices

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

que expresamos como

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

La partición de una matriz $\mathbf{A}$ *consiste en trazar unas líneas imaginarias que dividen sus elementos en diferentes bloques o submatrices.*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 9 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & 10 \\ \hline 7 & 7 & 6 & 9 & 5 \\ 8 & 8 & 9 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

A.12.1. Operaciones con matrices particionadas.

1. **Suma**

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices de orden $m \times n$ que particionamos como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

en donde las submatrices $\mathbf{A}_{ij}$ y $\mathbf{B}_{ij}$ tienen el mismo orden $m_i \times n_j$ (partición conforme). Entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

2. **Multiplicación**

Sea $\mathbf{C}$ una matriz de orden $n \times p$ que particionamos como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}$$

de tal modo que la partición de las filas de $\mathbf{C}$ coincide con la partición de las columnas de $\mathbf{A}$ (partición conforme). Entonces, el producto de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ es

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{C}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{C}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{C}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{C}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}$$

3. **Traspuesta**

La trapuesta matriz particionada $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ $(i, j = 1, 2)$ es

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} \\ \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} \end{pmatrix}$$

4. **Inversa**

La inversa de la matriz particionada $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ $(i, j = 1, 2)$ es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

en donde $\mathbf{D} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$. Una forma alternativa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} & -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{E}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

en donde $\mathbf{E} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$.

Demostración. La inversa de la matriz particionada $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ $(i, j = 1, 2)$ debe ser una matriz $\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{A}^{ij}]$ $(i, j = 1, 2)$ con una partición conforme que cumpla $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$, esto es,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{I}_{22} \end{pmatrix}$$

De aquí, obtenemos el sistema de ecuaciones matriciales

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}^{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{21} = \mathbf{I}_{11}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}^{21} = \mathbf{0}_{21}$$

que permiten obtener las incógnitas $\mathbf{A}^{11}$ y $\mathbf{A}^{21}$. En efecto, de la segunda ecuación obtenemos

$$\mathbf{A}^{21} = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{11}$$

Sustituyendo $\mathbf{A}^{21}$ en la primera ecuación

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}^{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{11} = \mathbf{I}_{11}$$

de donde

$$\mathbf{A}^{11} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}$$

Análogamente, del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{22} &= \mathbf{0}_{12}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}^{22} &= \mathbf{I}_{22}\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{12} =& - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{22}\\ \mathbf{A}^{22} =& (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\end{aligned}$$

En resumen,

$$\boxed{\begin{array}{ll}\mathbf{A}^{11} =(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} = \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{A}^{12} = - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{22} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^{-1}\\ \mathbf{A}^{21} = - \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{11} = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{E}^{-1} & \mathbf{A}^{22} =(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\end{array}}$$

Además, debe cumplirse que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, esto es,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12}\\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_{11} & \mathbf{0}_{12}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{I}_{22}\end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones en $\mathbf{A}^{11}$ y $\mathbf{A}^{12}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}^{12}\mathbf{A}_{21} &= \mathbf{I}_{11}\\ \mathbf{A}^{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}^{12}\mathbf{A}_{22} &= \mathbf{0}_{12}\end{aligned}$$

proporciona

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{12} &= -\mathbf{A}^{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\\ \mathbf{A}^{11} &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}\end{aligned}$$

y el sistema de ecuaciones en $\mathbf{A}^{22}$ y $\mathbf{A}^{21}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}^{22}\mathbf{A}_{21} &= \mathbf{0}_{21}\\ \mathbf{A}^{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}^{22}\mathbf{A}_{22} &= \mathbf{I}_{22}\end{aligned}$$

proporciona

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{21} &= -\mathbf{A}^{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\\ \mathbf{A}^{22} &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\boxed{\begin{array}{ll}\mathbf{A}^{11} =(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} = \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{A}^{12} = - \mathbf{A}^{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\\ \mathbf{A}^{21} = - \mathbf{A}^{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}^{22} =(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\end{array}}$$

Queda por probar que se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} =& \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\\ (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} =& \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\end{aligned}$$

que son casos particulares del lema de inversión de matrices. □

PROPOSICIÓN 134. *Lema de inversión de matrices. Sean* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{Z}$ *dos matrices no signulares de órdenes* m *y* n*, respectivamente, y sea* $\mathbf{Y}$ *una matriz de orden* $m \times n$*. Entonces*

$$(\mathbf{X} + \mathbf{YZY}')^{-1} = \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{Y}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{YY}'\mathbf{X}^{-1}$$

EJERCICIO 15. *Considere la matriz particionada* $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_2]$*. Calcule:*

a) $\mathbf{X}'$

b) $\mathbf{X}'\mathbf{X}$

c) $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

EJERCICIO 16. *Sean* $\mathbf{x_1}', \ldots, \mathbf{x}'_m$ *las filas de la matriz* $\mathbf{X}$ *de orden* $m \times n$*. Demostrar que*

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i\mathbf{x}'_i$$

A.13. Derivadas de una función multidimensional

La forma lineal

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

es una función de n-variables independientes $x_1, \ldots, x_n$. El cambio de $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ cuando x_1 cambia permaneciendo las otras variables independientes $x_2, \ldots, x_n$ constantes es el concepto de derivada parcial de $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ respecto de x_1

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_1} = a_1$$

La derivada de $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ respecto de $\mathbf{x}$ es un vector columna que contiene la derivada parcial de $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ respecto de cada elemento de $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

Análogamente, la derivada de $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ respecto de $\mathbf{x}'$ es un vector fila que contiene la derivada parcial de $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ respecto de cada elemento de $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}'$$

Sea la forma cuadrática

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} =& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_ix_j\end{aligned}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica. La derivada de $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ respecto del vector $\mathbf{x}$ es un vector columna

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \cdots \\ 2(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Vemos que la derivada de $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ respecto de x_i es la forma lineal $2\mathbf{a}_i'\mathbf{x}$, donde $\mathbf{a}_i$ es la i-ésima columna o fila de la matriz $\mathbf{A}$.

Consideramos ahora la segunda derivada de $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ respecto de x_i (primera derivada de la primera derivada)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial 2(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)}{\partial x_i} = 2a_{ii}$$

y la segunda derivada de $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ respecto de x_i y x_j

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial 2(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)}{\partial x_j} = 2a_{ij}$$

La segunda derivada de $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ respecto del vector $\mathbf{x}$ es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ que contiene las segundas derivadas $\partial^2\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}/\partial x_i \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}'} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Se cumple que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right)}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial\,(2\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'} = 2\mathbf{A}$$

A.14. Ejercicios

Sean

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 110 \\ 135 \\ 145 \\ 165 \end{pmatrix}$$

1. Calcule el producto escalar de la primera y segunda columnas de $\mathbf{X}$.
2. Calcule $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'\mathbf{y}$.
3. Obtenga la inversa de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.
4. Calcule el producto de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ y $\mathbf{X}'\mathbf{y}$.
5. Calcule la matriz de proyeccción $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ y compruebe que $\mathbf{P}$ es una matriz idempotente.
6. Calcule la proyección de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{X}$, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y}$.
7. Calcule la diferencia entre $\mathbf{y}$ e $\hat{\mathbf{y}}$.
8. Obtenga los autovalores de la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. ¿Son todos positivos? ¿Porqué?
9. Obtenga los autovalores de la matriz $\mathbf{P}$. Compruebe que la traza de $\mathbf{P}$ es igual a la suma de sus autovalores.
10. Obtenga los autovalores de la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ y $\mathbf{I} + \mathbf{P}$.
11. Calcule la raíz cuadrada de la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.
12. Obtenga la descomposición de Cholesky de la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.