

*Bases Matemáticas para la
Educación Primaria*

Guía de Estudio

Tema: Figuras geométricas

Conceptos geométricos

En la clase de matemáticas, y en los textos escolares, encontramos expresiones tales como:

- a) *“Dibuja una recta”*; b) *“Dibuja un ángulo”*; c) *“Recorta un triángulo”*; d) *“Muéstrame un plano”*.
- Define los conceptos geométricos que intervienen en dichas frases.
- Describe posibles conflictos de significado que pueden surgir al comparar esas expresiones con los conceptos geométricos correspondientes.

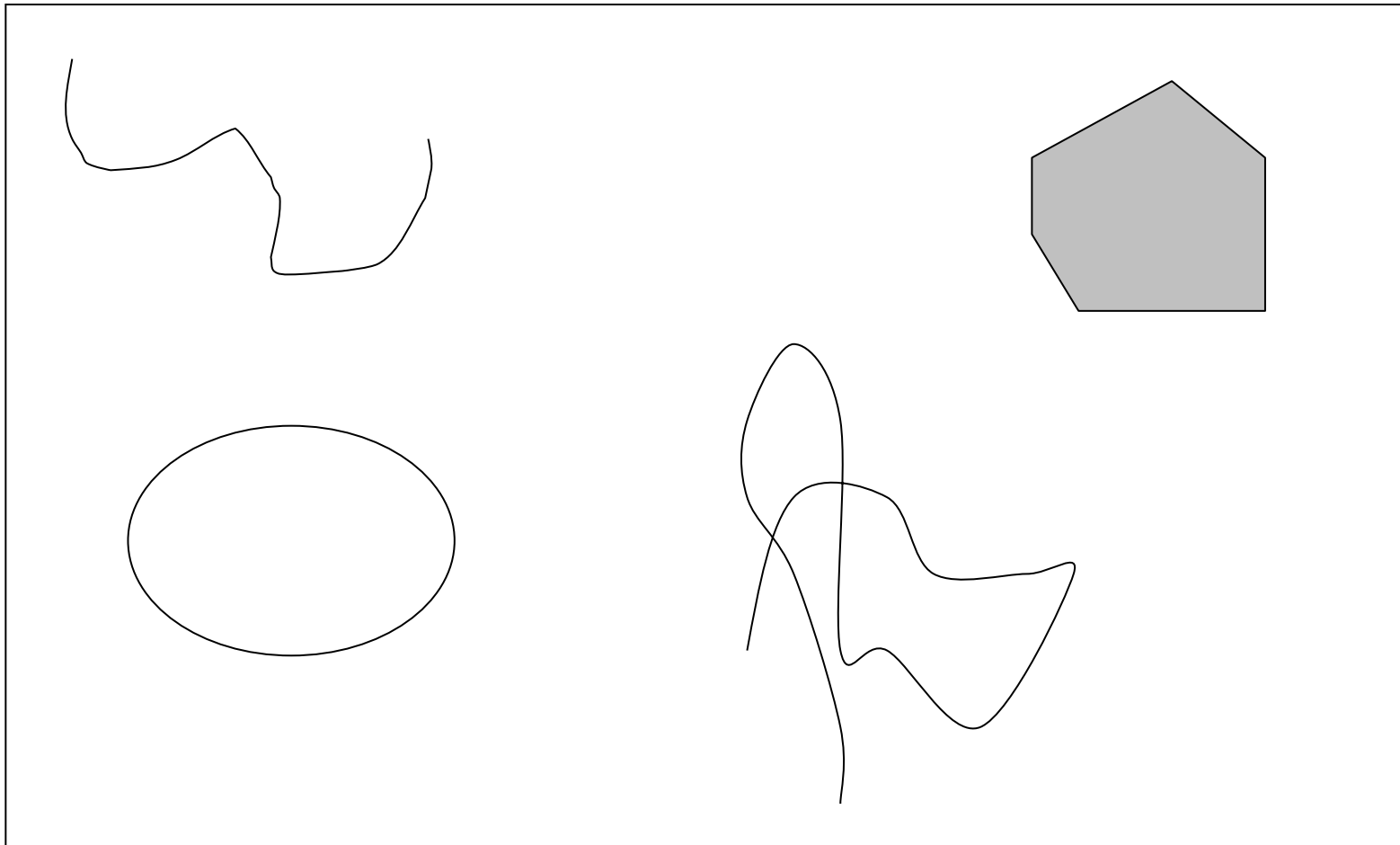
Posibles conflictos de significado:

- En las expresiones citadas de los libros de texto se consideran las figuras geométricas y sus elementos como si fueran objetos de naturaleza física, y que se pueden manipular. Esto contrasta con la naturaleza ideal o mental de los objetos que considera la geometría.
- Los objetos geométricos se deben usar siguiendo las reglas que los definen; así una recta es ilimitada, no tiene espesor, etc.

Curvas y polígonos en el plano

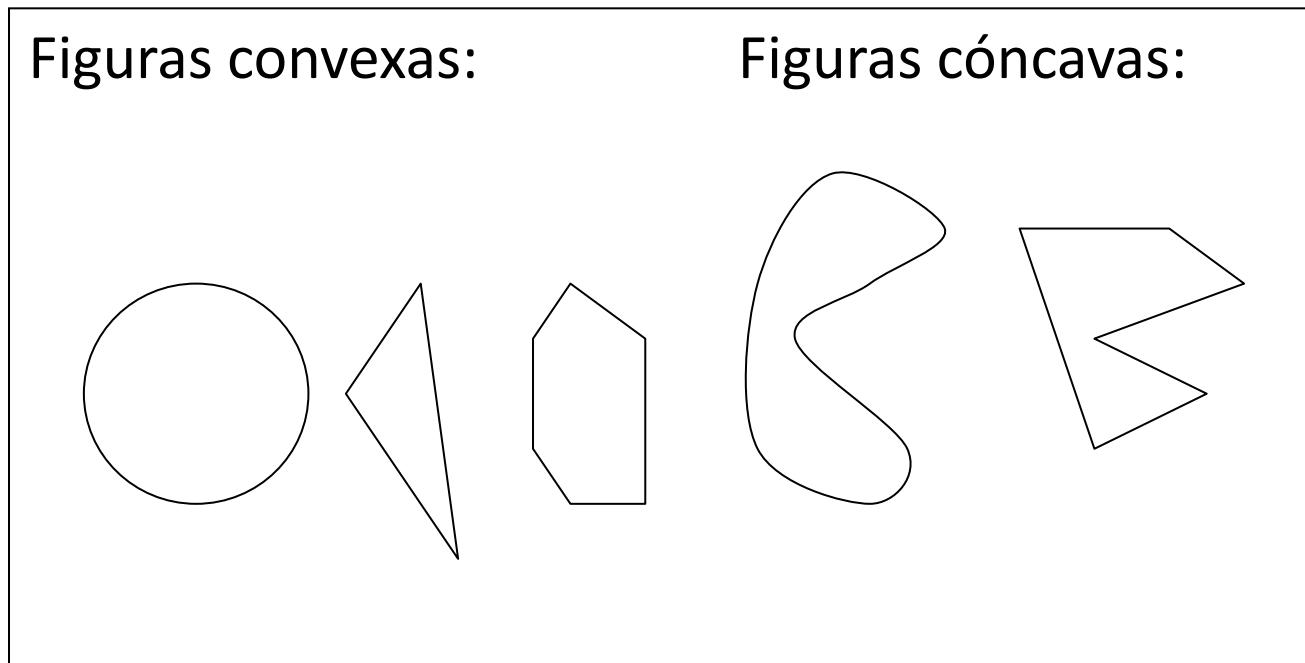
- Una *curva* plana se puede describir de manera intuitiva e informal como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado.
- Si el lápiz nunca pasa dos veces por un mismo punto se dice que la curva es *simple*.
- Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que comenzó a trazar se dice que la curva es *cerrada*.
- Si el único punto por el que el lápiz pasa dos veces es el del comienzo y final del trazado se dirá que la curva es *cerrada y simple*.
- Se requiere que las curvas tengan un punto inicial y otro final, por lo que las rectas, semirecta y ángulos no son curvas.

Ejemplos de curvas



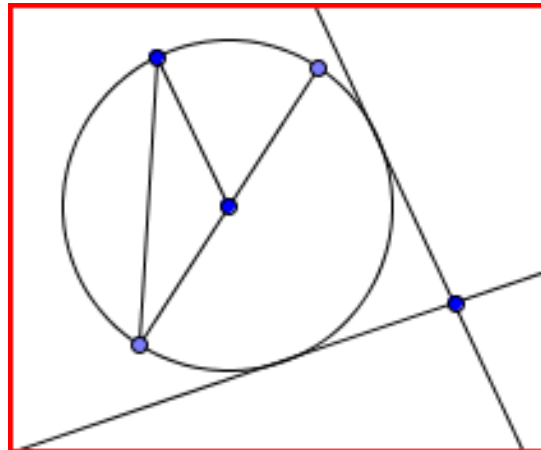
Curvas y figuras convexas

- Una figura se dice que es *convexa*, si y sólo si, contiene el segmento PQ para cada par de puntos P y Q contenidos en la figura. Las figuras no convexas se dice que son *cóncavas*.



Circunferencia y círculo

- La *circunferencia* es una curva cerrada, convexa, tal que la distancia de cualquiera de sus puntos a otro fijo es constante.
- El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia y la distancia constante se llama **radio** (también se llama radio al segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia; un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro).



Curvas poligonales y polígonos

- Una curva simple que está formada por segmentos unidos por sus extremos se dice que es una *curva poligonal*.
- Si dicha curva es cerrada se dice que es un *polígono*: a los segmentos que la forman se llaman *lados* y a los extremos de esos segmentos, *vértices*.
- Si todos los lados de un polígono son iguales se dice que es regular.
- En principio, nada se dice sobre si las curvas poligonales, y los polígonos, han de ser planos. También se puede hablar de poligonales y polígonos espaciales, aunque el estudio de los polígonos se suele restringir a los polígonos contenidos en el plano.

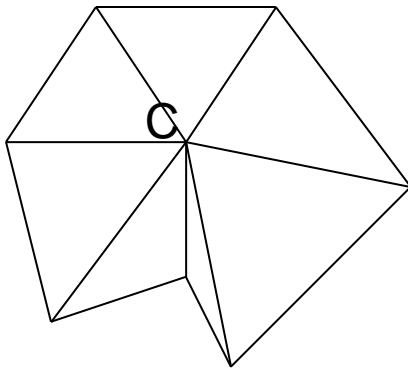
EXPLORACIÓN DE LOS ÁNGULOS DE LOS POLÍGONOS

- 1. a) ¿Cuánto mide el ángulo central de un octógono regular?
- ¿Cómo se puede calcular la medida del ángulo central de un polígono regular de n lados?

- 2. a) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos exteriores de un octógono regular?
- b) ¿Cómo se puede calcular la medida del ángulo exterior de un polígono regular de n lados?

- 3. a) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un octógono regular?
- ¿Cómo se puede calcular la medida del ángulo interior de un polígono regular de n lados?

- 4. Encontrar una expresión algebraica que permita calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.



Descomponemos el polígono en triángulos, como se indica en la figura. Si el polígono es de n lados se forman n triángulos. Los ángulos interiores de cada triángulo suman 180° .

La suma total de los ángulos producidos en dicha descomposición serán de $180n$.

No obstante, habrá que restar la suma de todos los ángulos que concurren en el vértice interior V , que es de $2 \cdot 180^\circ$.

Por tanto, la fórmula será:

$$S_i = 180n - 2 \cdot 180 = 180(n-2)$$

Los triángulos y su clasificación

Definiciones y propiedades

- Triángulo es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos.
- Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan *lados*, y los extremos de los lados, *vértices*.
- En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: *interior* (formado por dos lados) y *exterior* (formado por un lado y la prolongación de otro).

Los triángulos y su clasificación

- *Algunas propiedades*
- En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.
- En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
- Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.
- Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendidos.
- Dos triángulos son iguales cuando tienen los tres lados iguales.
- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.

Los triángulos y su clasificación

Atendiendo a sus lados

- a) Equiláteros: Son los que tienen sus 3 lados iguales.
- b) Isósceles: Son los que tienen dos lados iguales.
- c) Escalenos: Son los que sus 3 son lados desiguales.

Atendiendo a sus ángulos:

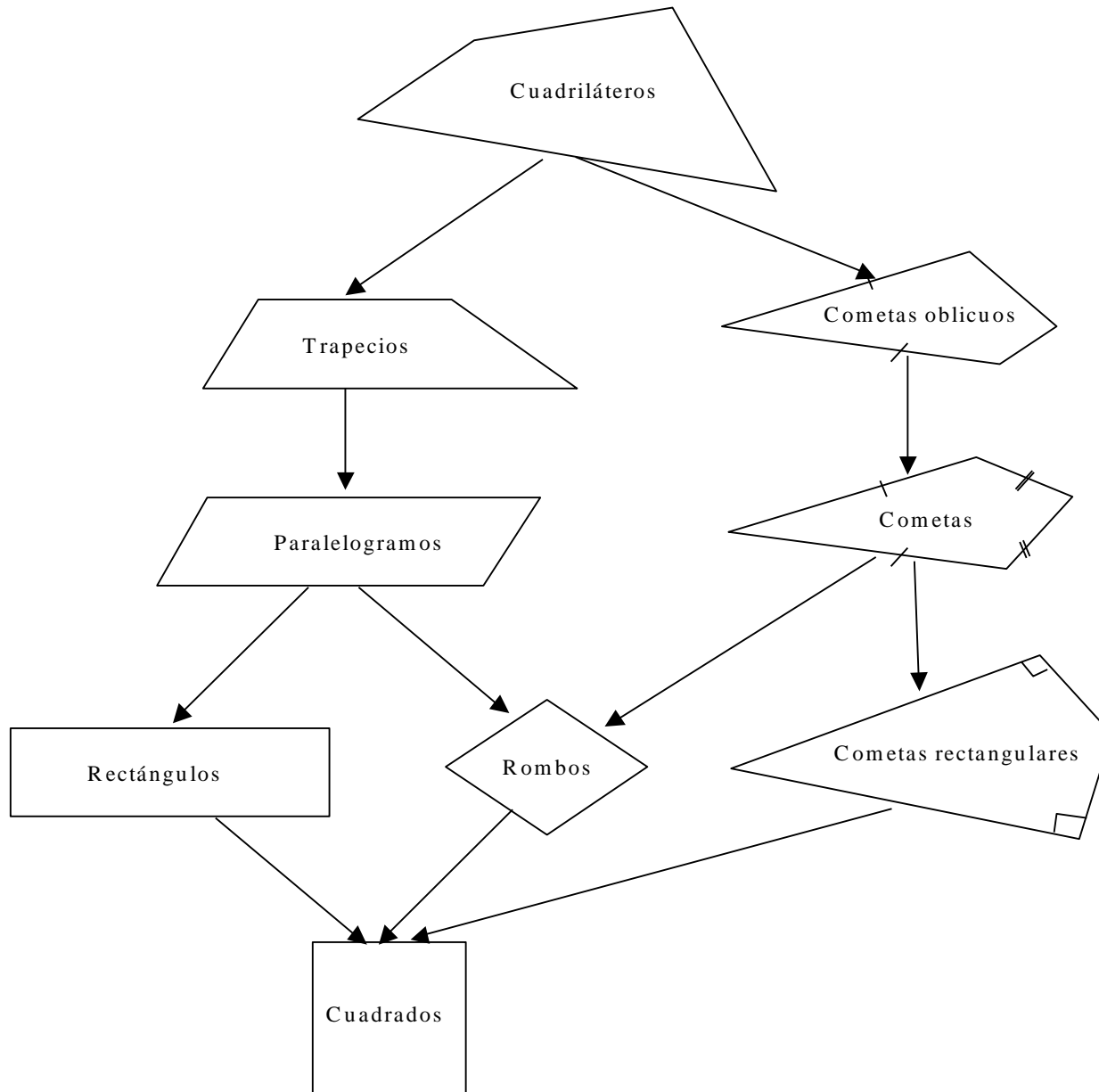
- a) Rectángulos: Son los que tienen un ángulo recto (90°).
- b) Acutángulos: Son los que tienen sus 3 ángulos agudos.
- c) Obtusángulos: Son los que tienen un ángulo obtuso.

Los cuadriláteros y su clasificación

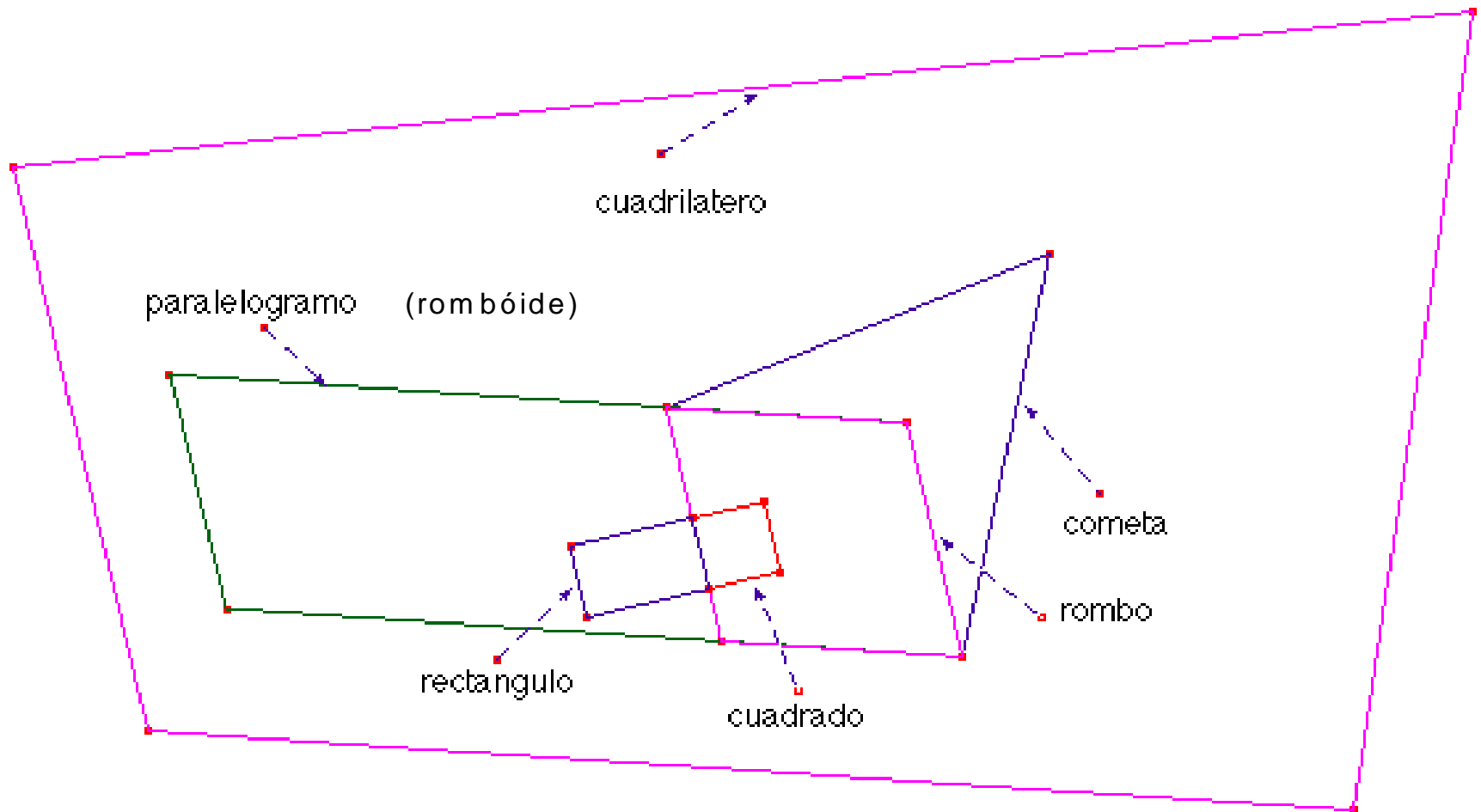
Cuadriláteros: polígonos de cuatro lados.

- Para clasificarlos hay que estudiar las características comunes que tienen estas figuras, lo que dependerá a su vez de los criterios o variables que observemos:
 - Paralelismo de lados
 - Igualdad de lados
 - Igualdad de ángulos
 - Número de ángulos rectos
 - Posición relativa de las diagonales
 - Concavidad y convexidad

Los cuadriláteros y su clasificación



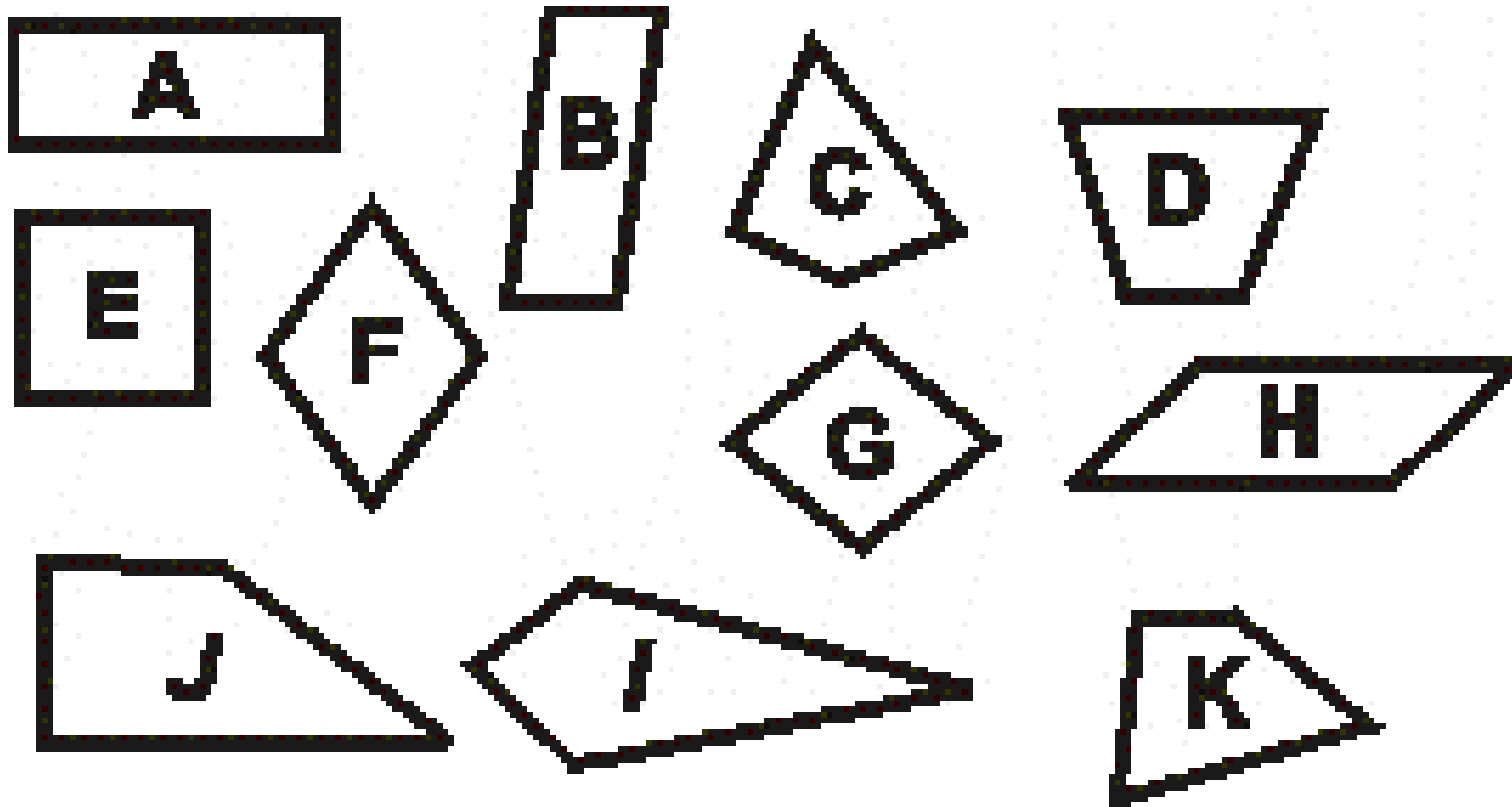
Los cuadriláteros y su clasificación



Los cuadriláteros y su clasificación

EJERCICIO:

- Clasifica los siguientes cuadriláteros



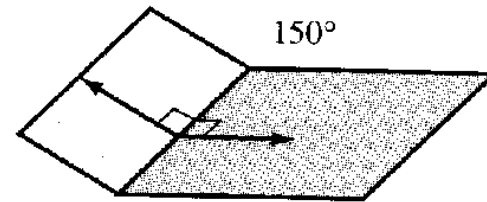
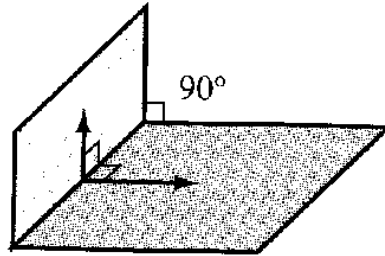
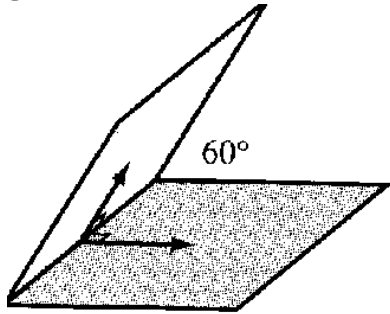
Figuras en el espacio

Planos y líneas en el espacio

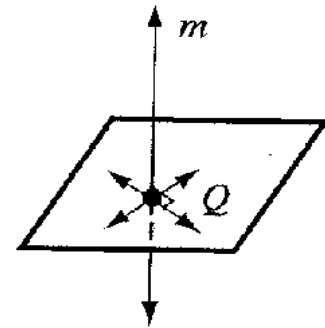
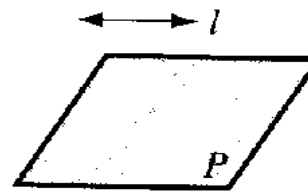
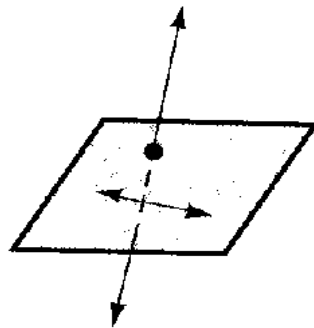
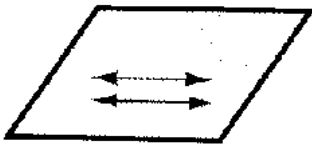
- Cada plano separa los puntos del espacio en tres conjuntos disjuntos: el propio plano y dos regiones llamados *semiespacios*.
- Dos planos en el espacio pueden tener una intersección común, que será una recta, o bien ser disjuntos, en cuyo caso se dice que son *paralelos*.
- El ángulo formado por dos planos que se cortan se llama *ángulo diedro*. La medida de dicho ángulo es la correspondiente al ángulo formado por dos semirectas contenidas en los semiplanos que lo forman y que sean perpendiculares a la recta de intersección correspondiente.

Figuras en el espacio

Ángulos diedros y sus medidas:



Líneas y planos en el espacio:



Líneas paralelas

Líneas que se cruzan

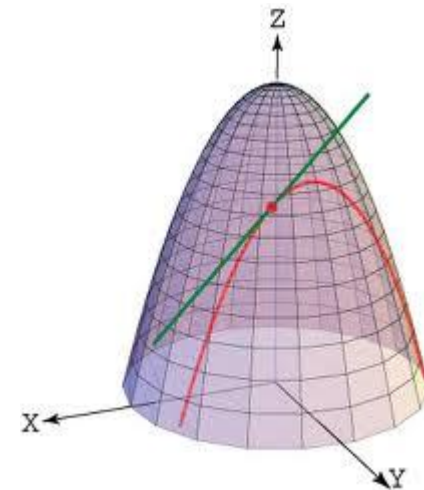
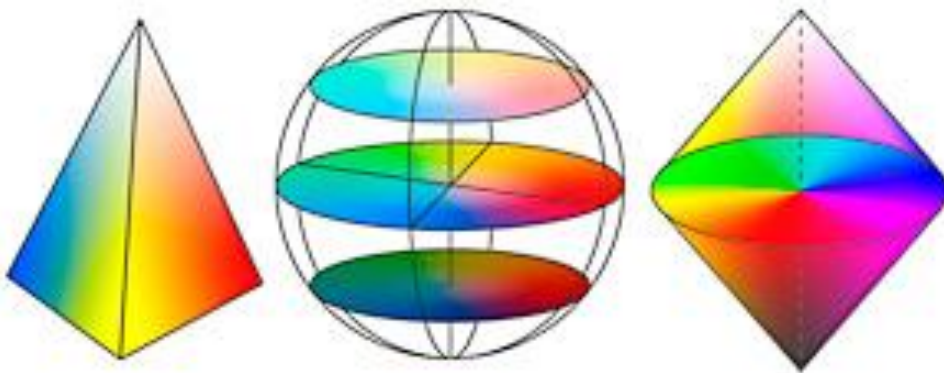
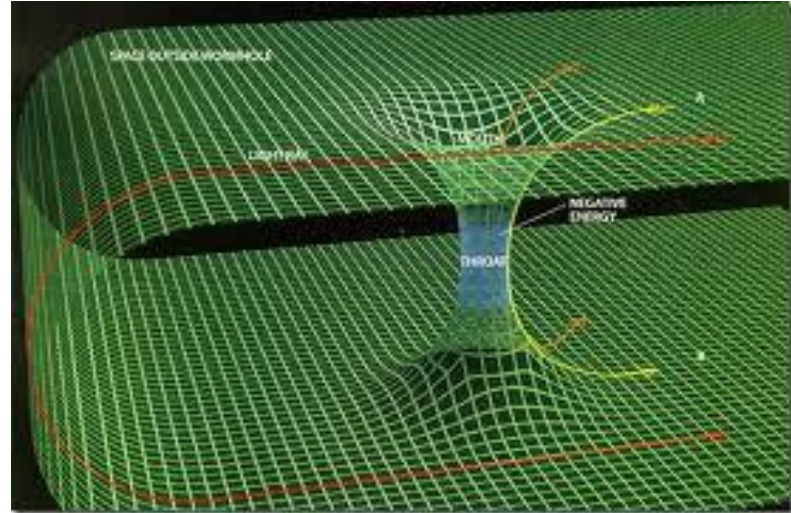
Línea $l \parallel$ a P

Línea m perp. a Q

Curvas, superficies y sólidos

- El concepto intuitivo de curva se puede extender del plano al espacio imaginando figuras dibujadas por un lápiz "mágico" cuyos puntos dejan un trazo visible en el aire.
- Cualquier superficie sin agujeros y que encierra una región hueca - su interior- se dice que es una *superficie cerrada simple*.
- La unión de todos los puntos de una superficie cerrada simple y todos los puntos de su interior forman una figura espacial llamada un *sólido*.
- Una superficie cerrada simple es *convexa* si el segmento que une cualquier par de puntos de la superficie está contenido en el interior de dicha superficie; esto es, el sólido limitado por la superficie es un conjunto convexo en el espacio. Por ejemplo, la esfera, que es el conjunto de puntos situados a una distancia constante de un punto fijo (el centro), es convexa

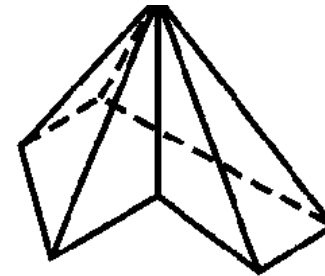
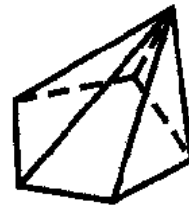
Figuras en el espacio



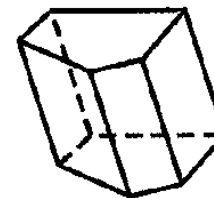
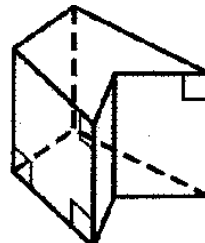
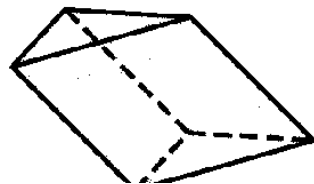
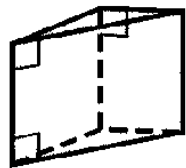
Los poliedros y su clasificación

Definición:

- Un poliedro es el sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas. Cada región poligonal se dice que es una cara del poliedro, y los vértices y lados de las regiones poligonales se dicen que son los vértices y lados del poliedro.



PIRÁMIDES



PRISMAS
RECTOS Y
OBLICUOS

Clasificación de los poliedros

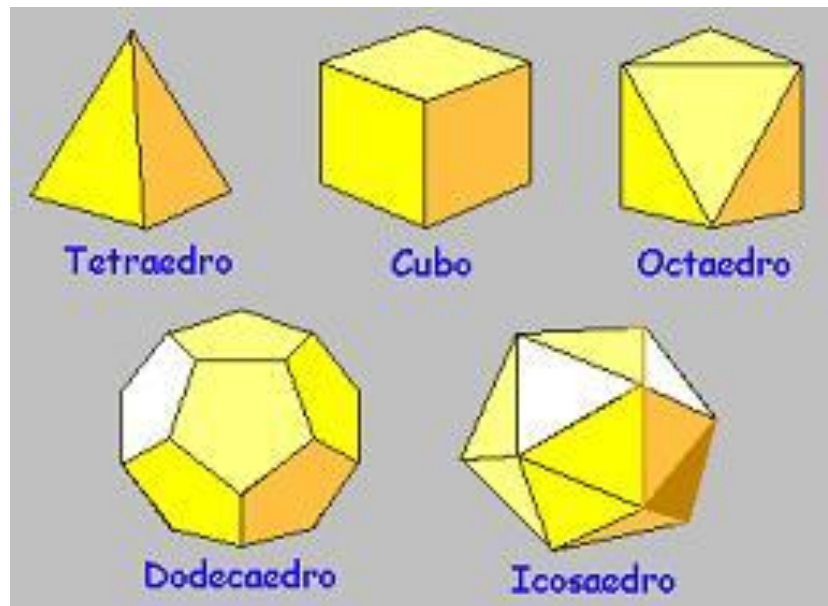
Para clasificar los poliedros podemos atender a diversos criterios, como por ejemplo, la regularidad y número de caras que concurren en los vértices. Otros criterios de clasificación de los poliedros son:

- Inclinación (rectos y oblicuos)
- Poliedros con bases (con una base, o varias bases)
- Según la construcción del modelo
 - Con polígonos regulares (Poliedros regulares, semirregulares, deltaedros)
 - Con polígonos iguales (Poliedros de caras iguales: Poliedros regulares, deltaedros, bpirámides de base regular)
 - Con vértices iguales (Poliedros regulares, semirregulares, prismas rectos de base regular, ...)
- Combinaciones de distintos criterios
- Ejes y planos de simetría, diagonales, ángulos.

Poliedros regulares

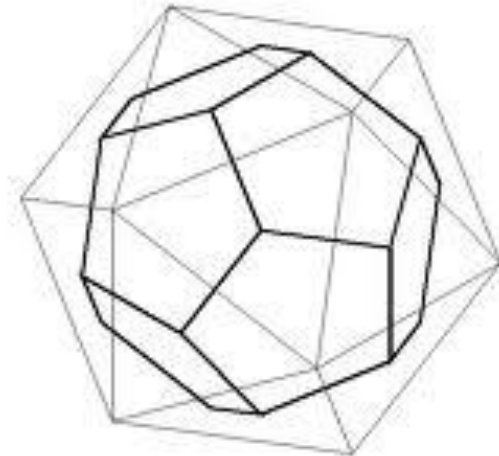
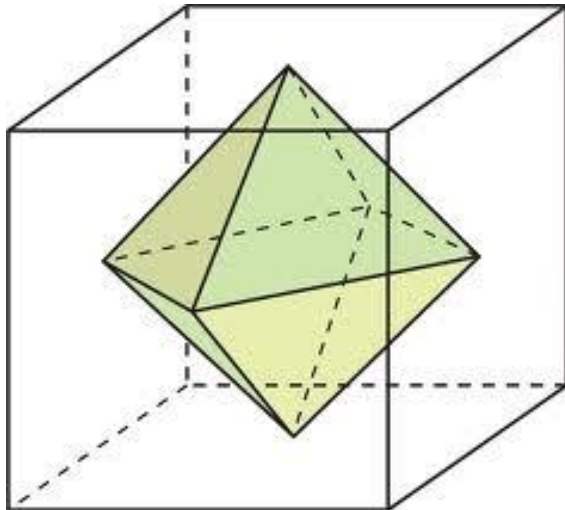
Un poliedro regular es un poliedro con las siguientes características:

- la superficie es convexa;
- las caras son regiones poligonales regulares congruentes;
- concurren el mismo número de caras en cada uno de los vértices.



Poliedros duales

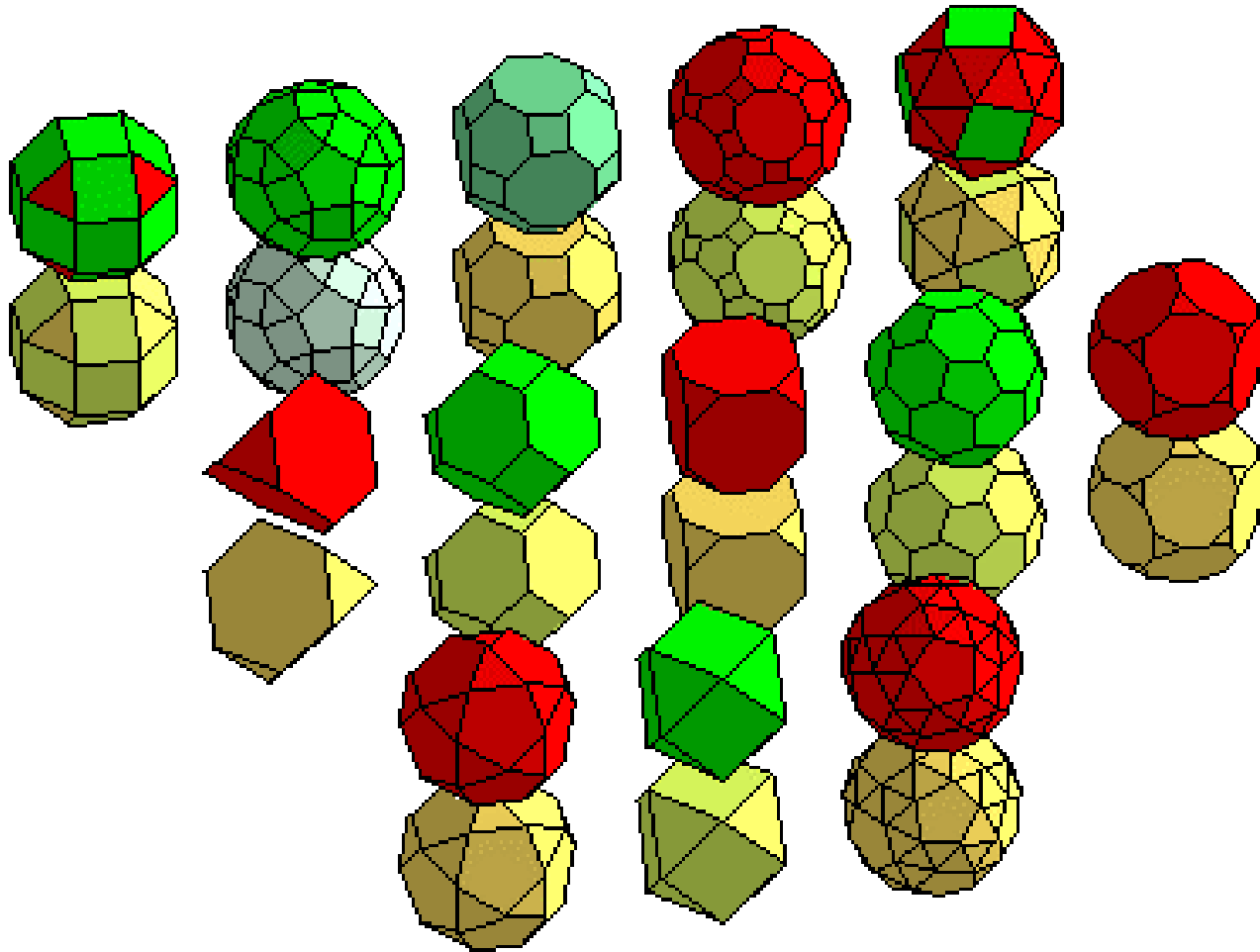
- Si comparamos el número de caras del cubo con el número de vértices del octaedro. Vemos que coinciden. Es decir, si intercambiamos caras por vértices, obtenemos los mismos datos numéricos, ya que el número de aristas es el mismo en ambos poliedros.
- Si encajamos un poliedro en el otro vemos que los vértices de uno se sitúan en los centros de las caras del otro. Estos dos poliedros, que pertenecen a la misma familia, se dicen que son duales.



Poliedros semiregulares

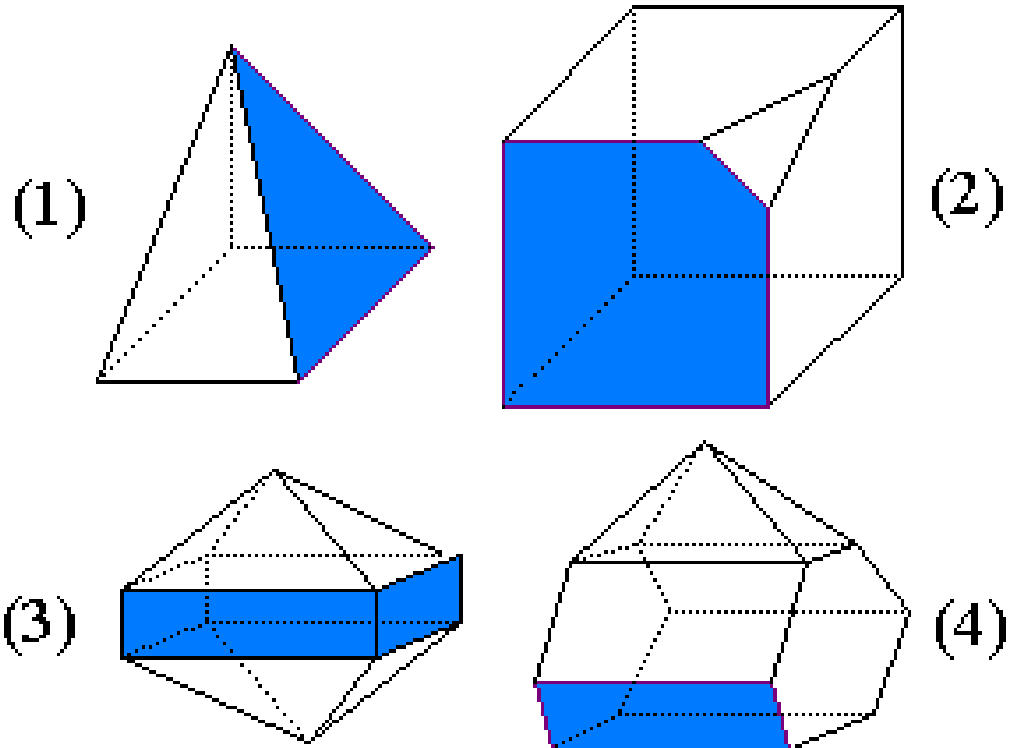
- Los poliedros regulares cumplen las tres condiciones de regularidad (caras regulares e iguales y vértices iguales).
- Si prescindimos de la condición de igualdad de caras, los poliedros resultantes tienen un grado menor de regularidad, y se llaman semirregulares o arquimedianos (en honor de Arquímedes).
- Existen solamente 13 de ellos (además de los infinitos prismas y antiprismas que son semirregulares). Un método para conseguir algunos de estos poliedros partiendo de los poliedros regulares es mediante el proceso de truncamiento.
- Un tipo de truncamiento consiste en cortar las aristas que concurren en cada vértice por un plano de manera que la sección producida sea un polígono regular cuyo lado sea de la misma longitud que el resto de las aristas.

Poliedros semiregulares



EXPLORACIÓN DE LOS POLIEDROS

- 1) En los poliedros de la figura, cuenta el número de caras, vértices y aristas y escríbelos en la tabla.



Poliedro	N° de caras (C)	N° de vértices (V)	N° de aristas (A)
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

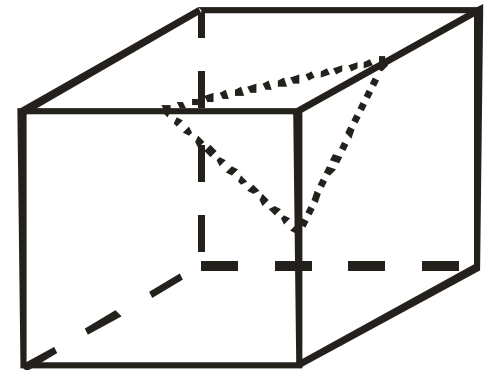
¿Encuentras alguna relación entre C, V y A?
Inténtalo con otros poliedros.

¿Se puede construir un poliedro regular cuyas caras sean hexágonos? Justifica tu respuesta.

Ejercicios

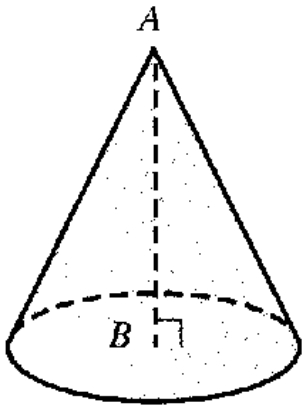
1) Un objeto de decoración está formado por un prisma pentagonal sobre el que hay una pirámide pentagonal cuya base coincide con la del prisma. Dibuja el objeto. Indica el número de caras, vértices y aristas que tiene. Indica el orden de cada vértice. Comprueba si verifica el Teorema de Euler para los poliedros

2) Se cortan todas las esquinas de un cubo de 2 cm de lado, como se indica en la figura, a distancia de 1 cm sobre cada arista. Describe con detalle el nuevo poliedro que se obtiene, haciendo un dibujo del mismo, y respondiendo a estas cuestiones: a) ¿Qué tipo de polígonos forman las caras del nuevo sólido? b) ¿Cuántos vértices, caras y aristas tiene el sólido así obtenido?

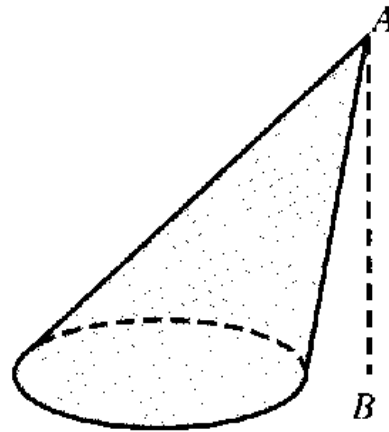


Conos

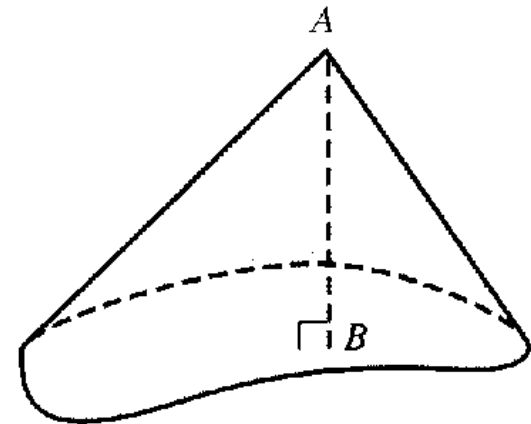
- Los conos y los cilindros son sólidos o cuerpos geométricos que generalizan las pirámides y los prismas, respectivamente.
- Un *cono* tiene una base que es cualquier región limitada por una curva cerrada simple contenida en un plano.
- La *superficie lateral* está generada por los segmentos que unen un punto fijo (el *vértice*) no situado en el plano de la base con los puntos de la curva que delimita la base.



Cono circular recto



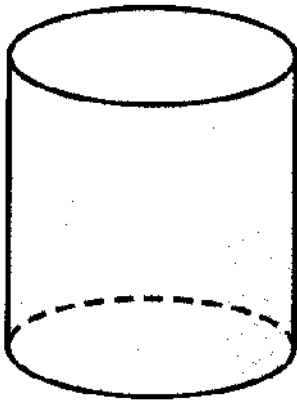
Cono circular oblicuo



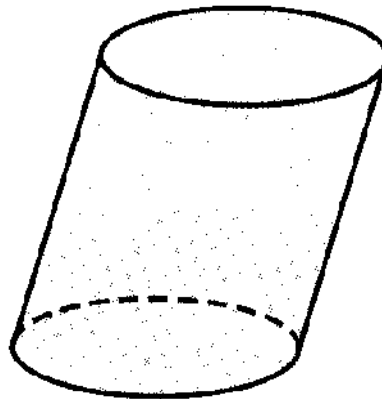
Cono general

Cilindros

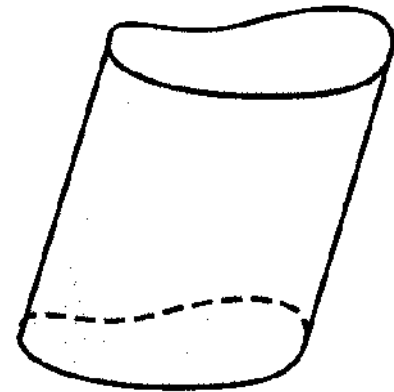
- Un *cilindro* es el sólido cuya superficie se genera trasladando los puntos de una región cerrada simple contenida en un plano hacia un plano paralelo.
- Los puntos que unen puntos correspondientes en las curvas que limitan las bases forman la *superficie lateral*. Si los segmentos que unen puntos correspondientes en las dos bases son perpendiculares a los planos de las bases se dice que el cilindro es *recto*, en caso contrario se trata de un cilindro *oblicuo*



Cilindro circular
recto



C. c. oblicuo



Cilindro general