1. ÁLGEBRA LINEAL
Y VECTORES ALEATORIOS

- Vectores
- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Matrices ortogonales
- Autovalores y autovectores
- Formas cuadráticas
- Vectores y matrices aleatorias
- Matriz de datos

DAGOBERTO SALGADO HORTA

Vectores

Matriz de datos: *p* variables observadas en *n* objetos

$$\begin{array}{l} \text{Objeto\_1} \longrightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \text{Objeto\_n} \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = X_{nxp} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^p$$

Variable_1 Variable_p

Vectores

Dados vectores

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

se define:

1. Suma de dos vectores

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_p + y_p \end{pmatrix}$$

Vectores

2. Producto de un escalar por un vector

$$c \cdot x = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ \vdots \\ c \cdot x_p \end{pmatrix}$$

3. Producto escalar de dos vectores

$$x \bullet y = \langle x, y \rangle = x' y = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p$$

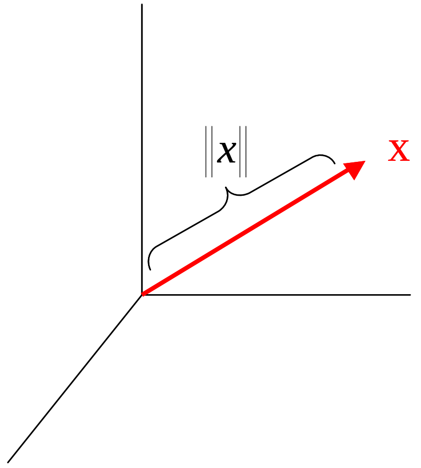
Vectores

Propiedades

$$\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle$$

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$$

$$\langle x,x\rangle \geq 0 \quad y \quad \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



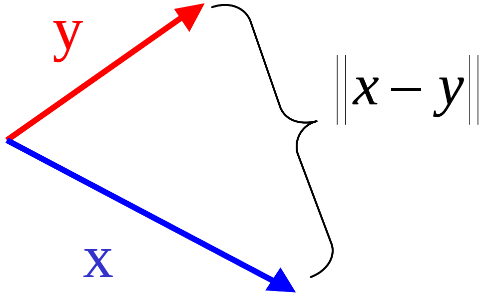
4. Norma de un vector

$$\|x\| = \sqrt{x'x} = (x'x)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}$$

Vectores

5. Distancia entre dos vectores

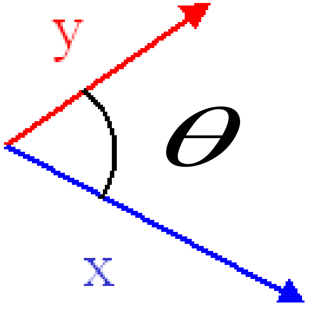
$$d(x,y) = \|x - y\|$$



6. Ángulo entre dos vectores

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

$$\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow x \perp y$$



Vectores

7. Ortogonalidad

$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es ortogonal si $u_i \perp u_j$

8. Ortonormalidad

$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es ortonormal si es ortogonal

y todos los vectores tienen norma 1, es decir, $\|e_i\| = 1$

Vectores

Ejemplo

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(i) \quad < u, v >$$
$$(ii) \quad \|u\|$$
$$(iii) \quad u \perp v ?$$
$$(iv) \quad d(u, v)$$
$$(v) \quad \cos\theta$$

9. Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Consecuencia:

$$-\|x\|\,\|y\| \leq \langle x, y\rangle \leq \|x\|\,\|y\|$$

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

Vectores

- Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es linealmente independiente si

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n$$

(la única manera de construir una combinación lineal igual a 0 es que todos los coeficientes sean 0)

Proposición Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente:

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \text{ ortogonal } \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \text{ l.i.}$$

Dem.-

$$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0$$

$$\left\langle u_j c, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \right\rangle = c_j \left\langle u_j, u_j \right\rangle = 0$$

$$\left\langle u_j, u_j \right\rangle \neq 0 \Rightarrow c_j = 0$$

∎

Vectores

Proyección de x sobre y

$$pr_y(x) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

Vectores

Ejemplo _

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$pr_y(x)?$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

- $V \subset \mathbb{R}^p$; V subespacio vectorial de $\mathbb{R}^p$

  si V es espacio vectorial,

  es decir, si $\forall u, v \in V \ y \ \forall a, b \in \mathbb{R}; \ au + bv \in V$

- Dado A = $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

$$span\ A \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \quad : c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Propiedades</u>

$(i)\ \ A \subset span\ A$

$(ii)\ span(A)\ es\ un\ subespacio$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Proposición $v \perp u_i \quad i = 1, \cdots, n \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad v \perp span\{u_1, \cdots, u_n\}$$

Dem.-

$$u \in span\{u_1, \cdots, u_n\}$$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v, u_i \rangle = 0$$

■

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Método de Gram-Schmidt

Dado un conjunto de vectores l.i., se puede construir otro conjunto ortogonal que genere el mismo espacio

Sean $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ linealmente independientes

$$
\begin{aligned}
u_1 &= x_1 \\
u_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\
u_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle x_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= x_n - \frac{\langle x_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \cdots - \frac{\langle x_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1}
\end{aligned}
$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Entonces:

$$(i) \quad span\{x_1, \cdots, x_n\} = span\{u_1, \cdots, u_n\}$$

$$(ii) \quad \{u_1, \cdots, u_n\} \; es \; ortogonal$$

Matrices ortogonales

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrices ortogonales

- A_{nxn}; inversa A^{-1}: $A A^{-1} = A^{-1}A = I$.
- A' transpuesta de A.
- Q_{nxn} es ortogonal si $Q'Q = QQ' = I$.

(las columnas de una matriz ortogonal son vectores ortonormales)

Matrices ortogonales

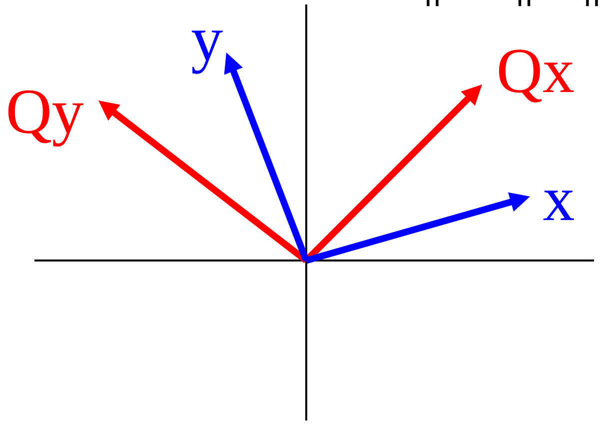
Propiedades

$$x, y \in \mathbb{R}^p;\ Q \text{ matriz ortogonal}$$

$$(i) \quad \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(ii) \quad x \perp y \Rightarrow Qx \perp Qy$$

$$(iii) \quad \|Qx\| = \|x\|$$

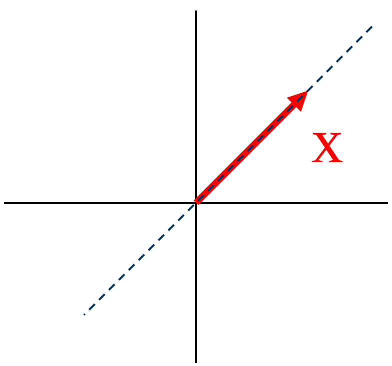


Autovalores y autovectores

A_{nxn}; λ ***autovalor*** de A

$$\Leftrightarrow \exists\, un\ vector\ x \neq 0\ tal\ que\ Ax = \lambda\, x$$

x es un ***autovector*** asociado a λ .



$$\exists x \neq 0,\ Ax - \lambda\, x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists x \neq 0,\ Ax - \lambda\, Ix = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists x \neq 0,\ (A - \lambda\, I)x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{\left|A - \lambda\, I\right|}_{\text{Polinomio característico}} = 0}_{\text{Ecuación característica}}$$

Autovalores y autovectores

Ejemplo

Autovalores y autovectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores

Propiedades

$$(i) \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = trA$$

$$(ii) \quad \left.\begin{array}{l} x_1 con \;\; autovalor \;\; \lambda_1 \\ x_2 con \;\; autovalor \;\; \lambda_2, \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \;\; y \;\; x_2 \; son \, l.i.$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Diagonalización de matrices

$$A_{nxn} \; simétrica \Leftrightarrow A = A' \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores: diagonalización

A simétrica $\Rightarrow$ existen autovalores reales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ con autovectores asociados $e_1, \cdots, e_n$ Ortonormales tales que

$$A_{nxn} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ & & & \\ & & & \end{array} \right)}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline \vdots \\ \hline e_n \end{pmatrix}}_{P'}$$

A=PDP', siendo D diagonal y P ortogonal

(Toda matriz simétrica es diagonalizable)

Autovalores y autovectores: diagonalización

Ejemplo

Diagonalizar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores: representación espectral

Sea $A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

A es simétrica $\Rightarrow$ existen autovalores reales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ con autovectores ortonormales $e_1, \cdots, e_n$ tales que

$$A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + \cdots + \lambda_n e_n e_n'$$

Autovalores y autovectores: representación espectral

Ejemplo

Descomposición espectral de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

A_{nxn} simétrica; $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

f(x)=x' A x es una forma cuadrática

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1 x_2 + \cdots + a_{ij}x_i x_j + \cdots + a_{n-1n}x_{n-1}x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Formas cuadráticas

Ejemplo

Expresar matricialmente la forma cuadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_2x_3$$

Escribir en forma cuadrática

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

Como A_{nxn} es simétrica, es diagonalizable, se puede escribir A = PDP’ y, por tanto, queda: f(x) = x’PDP’x.

Haciendo y = P’x:

$$f(x) = y'Dy = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

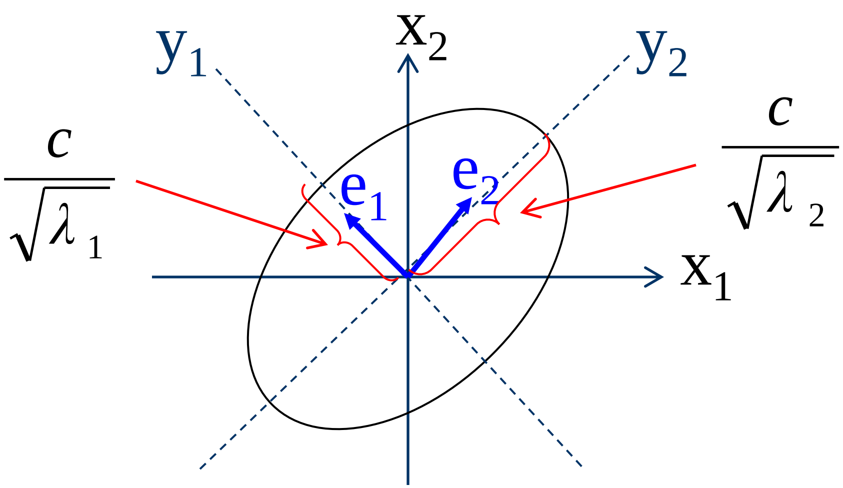
se tiene

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Formas cuadráticas

x'Ax=c^2 representa geométricamente una elipse en $\mathbb{R}^2$; los autovalores son $\lambda_1 > \lambda_2$ y los autovectores normalizados son e$_1$ y e$_2$

$$x'Ax = c^2$$
$$x'PDP'x = c^2 \Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c^2$$



Ejemplo

Representar, hallar ejes, hallar expresión reducida

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 9$$

Formas cuadráticas

<u>Clasificación de formas cuadráticas</u>

Sea f(x) = x' A x

- f es definida positiva si $\forall x \neq 0, \quad f(x) > 0$
- f es semidefinida positiva si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq 0$
- f es semidefinida negativa si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \leq 0$
- f es definida negativa si $\forall x \neq 0, \quad f(x) < 0$
- f es indefinida si
  $\exists x_1 \in \mathbb{R}^n \ y \ \exists x_2 \in \mathbb{R}^n \quad tal\ que \quad f(x_1) > 0 \ y \ f(x_2) < 0$

Formas cuadráticas

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A

- f es definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$
- f es semidefinida positiva $\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_n \geq 0$
- f es semidefinida negativa $\Leftrightarrow \lambda_1 \leq 0, \cdots, \lambda_n \leq 0$
- f es definida negativa $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \cdots, \lambda_n < 0$
- f es indefinida $\Leftrightarrow \exists \lambda_i > 0, \quad \exists \lambda_j < 0$

Formas cuadráticas

Raíz cuadrada de una matriz

A definida positiva;

B es raíz de A si A=BB ; $B=A^{1/2}$; $A=A^{1/2}\,A^{1/2}$

Si A es simétrica y diagonalizable, A=PDP' con descomposición espectral $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i e_i'$

Formas cuadráticas

Raíz cuadrada de una matriz

$$Sea \quad A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P' \Rightarrow A^{1/2} = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}P' = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\,e_i e_i'$$

Nota:

$$A^{-1} = P\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}P' = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}e_i e_i'$$

Descomposición singular de una matriz

Dada la matriz A_{mxn}, AA' es cuadrada y simétrica; por tanto, diagonalizable.

λ_i es un ***valor singular*** de A, si λ_i^2 es autovalor de AA'.

Descomposición singular

Sea A una matriz *mxn*; $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ valores singulares de A. Entonces existen matrices ortogonales U y V tales que:

$$A = U \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) V$$

Vectores y matrices aleatorias

X_i variable aleatoria

$\mu_i = E(X_i)$

$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = V(X_i) = E[X_i - E(X_i)]^2$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\text{Vector aleatorio}} \quad ; \quad \mathrm{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz aleatoria}}$$

Vectores y matrices aleatorias

Propiedades

Sea X_{mxm} y sean A_{kxm} y B_{nxr} matrices de constantes.

Entonces:

$$(i) \quad E(AX) = AE(X) = A\begin{pmatrix} E(X_{11}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{m1}) & \cdots & E(X_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad E(AXB) = AE(X)B$$

$$(iii) \quad Y_{mxn} \Rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Vectores y matrices aleatorias

Se llama ***vector de medias*** a:

$$EX = \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

y covarianza entre dos variables a

$$\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)].$$

Se puede definir la ***matriz de covarianzas*** de *X* como:

$$VX = \Sigma = \Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Vectores y matrices aleatorias

Proposición

Sea $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ X_1 \\ X_n \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \Re^p$ con $c_i \ \forall i = 1, \ldots, n$ constantes $\mathbb{R}$

$EX = \mu \,; VX = \Sigma$

$(i) \quad E(c'X) = c'\mu$

$\Sigma = E(X - \mu)(X - \mu)'$

$(ii) \quad V(c'X) = c'\Sigma c$

Proposición

Proposición

Sea C_{mxn} una matriz de constantes

$(i) \quad E(CX) = CE(X)$

$(ii) \quad V(CX) = C\Sigma C'$

Vectores y matrices aleatorias

Ejemplo

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} Y_1 = 2X_2 - X_1 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \\ Y_3 = X_2 - 2X_1 \end{cases}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vectores y matrices aleatorias

Matriz de correlaciones

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}};$$

en forma matricial: $\rho = V^{1/2} \sum V^{-1/2}$,

donde V es la ***matriz de varianzas***:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

Vectores y matrices aleatorias

Partición de un vector aleatorio

Sea $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \\ \hline X_{r+1} \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \hline X^{(2)} \end{pmatrix}$

- Vector de medias: $\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \hline \mu^{(2)} \end{pmatrix}$
- Matriz de covarianzas: $\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right)$, donde

$$\Sigma_{11} = V(X^{(1)})$$
$$\Sigma_{22} = V(X^{(2)})$$
$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}' = Cov(X^{(1)}, X^{(2)}) = Cov(X_i^{(1)}, X_j^{(2)})$$

Matriz de datos

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = X_{nxp} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^p$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}}{n} \quad \cdots \quad \bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ip}}{n}$$

Matriz de datos

- Vector de medias: $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$
- Matriz de varianzas y covarianzas: $S_n = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}$

donde $s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j) / n$

- Matriz de correlaciones: $R = V_n^{-1/2} S_n V_n^{-1/2}$, donde

$$V_n = \begin{pmatrix} s_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{pp} \end{pmatrix}$$

Matriz de datos

Proposición

Dado $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d.$;

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$(i) \quad E(\overline{X}) = \mu$$

$$(ii) \quad V(\overline{X}) = \Sigma / n$$

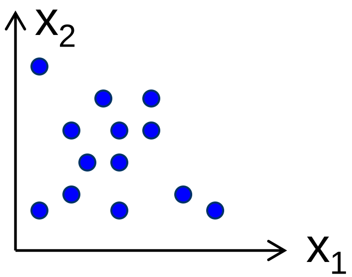
$$(iii) \quad E(S_n) = \frac{n-1}{n}\Sigma$$

Matriz de datos

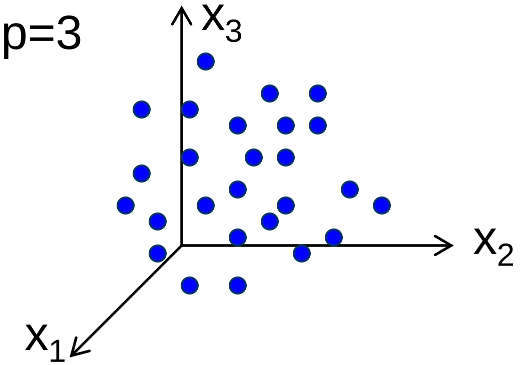
La matriz de datos se puede representar como:

- Diagrama de dispersión, *n* puntos en el espacio $\mathbb{R}^p$

p=2



p=3



Como para p>3 es imposible representarlo se hacen diagramas de dispersión múltiple de dos variables:

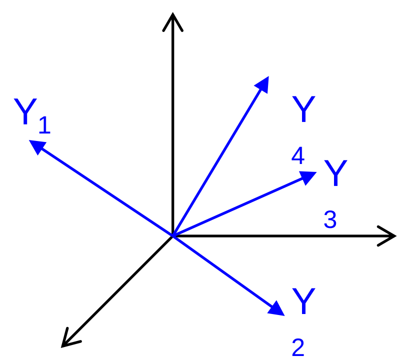
Matriz de datos

- Considerando las columnas en vez de la filas de la matriz de datos, es decir, *p* puntos en $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1p} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2p} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{np}
\end{pmatrix} = X \\
\begin{array}{ccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & \quad & Y_p \end{array}
\end{array}
$$

Para cuatro variables:

$$
\begin{array}{c}
X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{array}
\end{array}
$$



Matriz de datos

Vector de unos: $\mathbf{1}_{nx1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}\, n$ unos

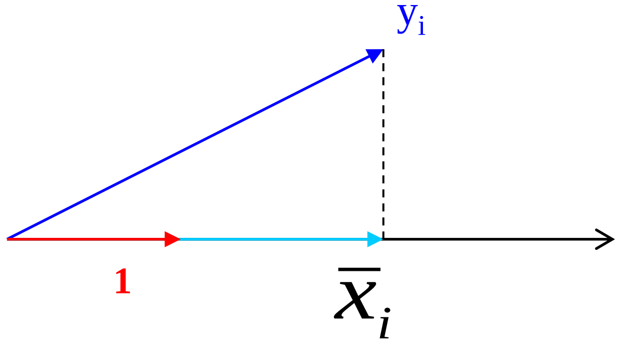
Propiedades:

- $\|\mathbf{1}\| = \sqrt{n}$ y forma el mismo ángulo con todos los ejes.
- $\mathbf{1}/\sqrt{n}$ es el vector unitario que forma el mismo ángulo en todas las direcciones.

Matriz de datos

- Coordenada en cualquier dirección de la proyección de un vector sobre el vector $\mathbf{1}$

$$pr_1(y_i) = \frac{\langle y_i, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} 1 / n = \bar{x}_i 1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \vdots \\ \bar{x}_i \end{pmatrix}$$



Matriz de datos

Vector de desviaciones a la media:

$$d_i = \begin{pmatrix} x_{1i} - \bar{x}_i \\ \vdots \\ x_{ni} - \bar{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} - \bar{x}_i \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de datos

Entonces:

- $$\|d_i\| = \sqrt{(x_{1i} - \bar{x}_i)^2 + \ldots + (x_{ni} - \bar{x}_i)^2} \Rightarrow \|d_i\|^2 = ns_{ii}$$

- $$\langle d_i, d_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j) = ns_{ij}$$

- $$\cos(d_i, d_j) = \frac{\langle d_i, d_j \rangle}{\|d_i\| \|d_j\|} = \frac{ns_{ij}}{\sqrt{ns_{ii}}\sqrt{ns_{jj}}} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}} = r_{ij}$$

Matriz de datos

Varianza generalizada y varianza total:

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \quad ; \quad \mu=E(X)=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \quad ; \quad \sum=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

Matriz de datos

- Varianza generalizada de *X*: $|\Sigma| = \det(\Sigma)$
- Varianza total de *X*: $traza(\Sigma) = \sigma_{11} + \cdots + \sigma_{pp}$

Caso muestral:

- Varianza generalizada muestral: $|S_n| = \det(S_n)$
- Varianza total muestral: $traza(S_n) = s_{11} + \cdots + s_{pp}$

Matriz de datos

Interpretación geométrica

- Área

$$\|d_1\|\|d_2\| sen\theta = \sqrt{ns_{11}}\sqrt{ns_{22}}\sqrt{1-\cos^2\theta} = n\sqrt{s_{11}s_{22}(1-r_{12}^2)}$$

- Varianza generalizada en $\mathbb{R}^p$

$$|S| = \frac{Volumen^2}{n^p}$$

Matriz de datos

Ejemplo

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$c'X = 2X_1 - 3X_2$$
$$b'X = X_1 - 2X_3$$

Matriz de datos

Combinaciones lineales de las componentes de una variable

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix};\quad \bar{x}=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix};\quad S_n=\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Y las combinaciones lineales:
$$\begin{aligned} c'X &= c_1X_1+\cdots+c_pX_p \\ b'X &= b_1X_1+\cdots+b_pX_p \end{aligned}$$

- Media muestral de *c'X*: $c'\bar{x}$
- Varianza muestral de *c'X*: $c'S_nc$
- Covarianza muestral de *c'X* y *b'X*: $c'S_nb$